



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

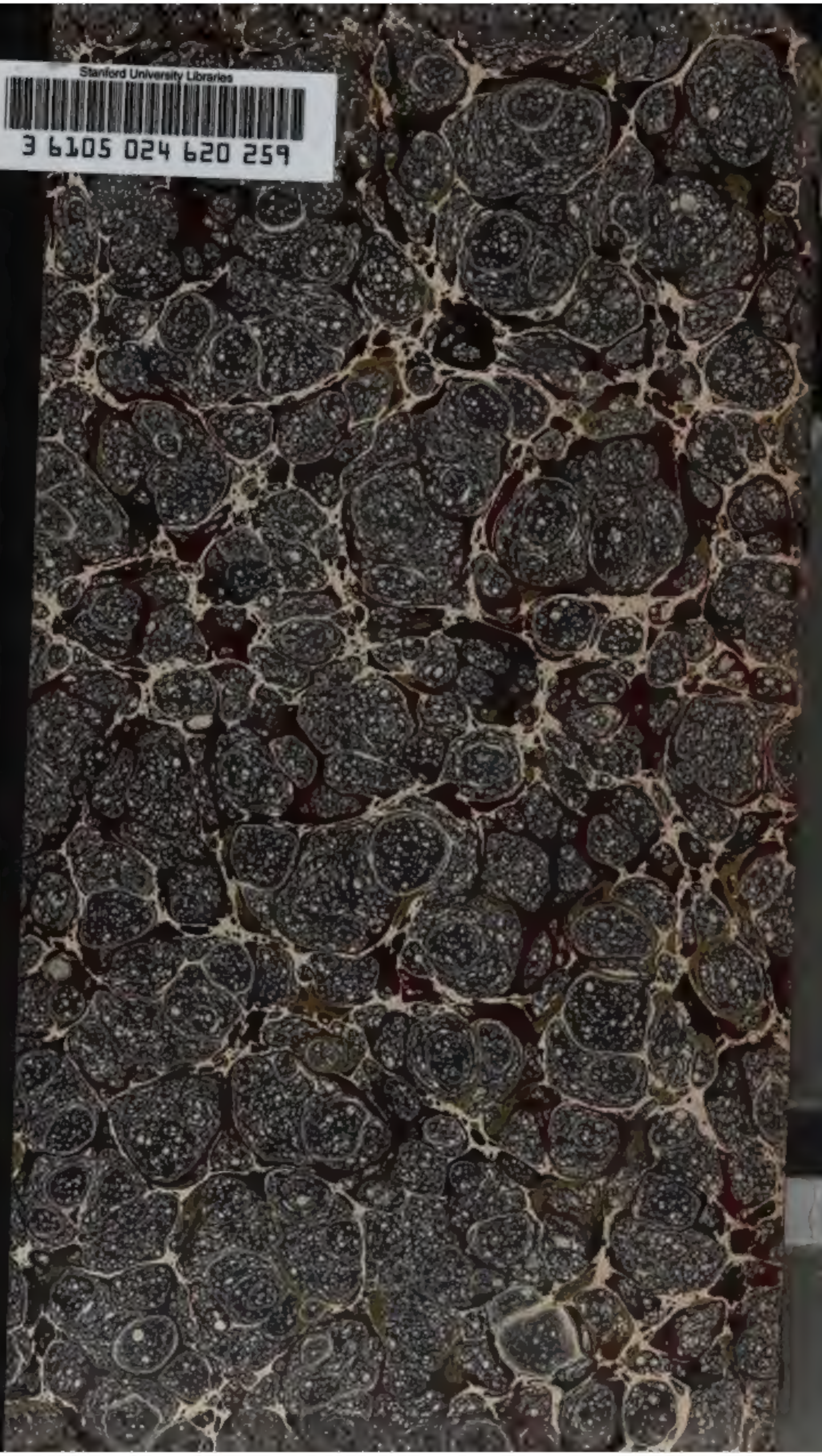
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



Stanford University Libraries



3 6105 024 620 259





510.5

A 673









**A r c h i v**  
der  
**Mathematik und Physik**

mit besonderer Rücksicht  
auf die Bedürfnisse der Lehrer an  
höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben.

von

**Johann August Grunert,**  
Professor zu Greifswald.



Zwanzigster Theil.



Mit vier lithographirten Tafeln.

---

**Greifswald.**  
C. A. Koch's Verlagshandlung  
Th. Kunike.

1853.

162447

162447

162447

162447

162447

162447

162447



## **Inhaltsverzeichniss des zwanzigsten Theils.**

---

### **Arithmetik.**

**Nr. der  
Abhandlung.**

**Heft. Seite.**

- |       |   |     |     |
|-------|---|-----|-----|
| I.    | Zur gründlichen Richtigstellung des Ausdrucks<br>für das Integral $\int \frac{dx}{x}$ . Von Herrn Dr. Wilhelm<br>Matzka, Professor der Mathematik an der k. k.<br>Universität zu Prag . . . . . | I.  | 1   |
| II.   | Bemerkungen zur Convergenz der unendlichen<br>Reihen. Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Leh-<br>rer an der Realschule zu Stralsund . . . .   | I.  | 43  |
| VII.  | Bemerkung über die wiederholte Differentiation<br>unter dem Integralzeichen. Von Herrn Lector<br>Lindman zu Strängnäs in Schweden . . .   | I.  | 117 |
| VIII. | Ueber die Lehre von den imaginären Grössen, als<br>Fortsetzung und weitere Ausführung der Ab-<br>handlung Nr. XL. S. 295. im ersten Theile<br>des Archivs. Von dem Herausgeber . . .            | II. | 121 |
| XIII. | Beitrag zur Buchstabenrechnung. Von Herrn<br>Professor G. Decher an der polytechnischen<br>Schule zu Augsburg . . . . .   | II. | 245 |

XIII.	Bemerkung zu Euler's Integralrechnung. Von Herrn Professor Dr. Wolfers zu Berlin . .	II.	247
XVIII.	Begründung eines Lehrsatzes zur Bestimmung höherer Integrale zusammengesetzter Functionen. Von Herrn Hofrath L. Oettinger zu Freiburg i. Br. . . . .	III.	321
XIX.	Einige Bemerkungen über die näherungsweise Auflösung einer Gleichung mit einer unbekannten Grösse und zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen. Von dem Herausgeber	III.	337
XXII.	Pädagogische Bemerkung von Bessel . . .	III.	355
XXII.	Lehrsatz: Wenn $x^2 + y^2 = z^2$ ist, so ist $x^m + y^m < z^m$ oder $x^m + y^m > z^m$ , je nachdem $m > 2$ oder $m < 2$ ist. Von dem Herausgeber . .	III.	356
XXIII.	Ueber Interpolation und mechanische Quadratur. Von dem Herausgeber . . . . .	IV.	361
XXVIII.	Neues Theorem über den Grenzübergang in unendlichen Reihen. Von Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer an der Realschule zu Stralsund . .	IV.	461
XXIX.	Lösung einer Aufgabe aus der Zahlentheorie auf geometrischem Wege. Von Herrn Dr. H. Burhenne, Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbschule in Cassel . . . .	IV.	466
XXXI.	Einige kleine Notizen von Herrn Hofrath Dr. Clansen zu Dorpat . . . . .	IV.	472

## Geometrie. .

IV.	Ueber einige Aufgaben der höheren Geometrie. Von dem Herrn Professor Dr. Dienger an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe . . .	I.	69
VII.	Bemerkungen des Herrn Lector Lindman zu Strengnäs in Schweden über das Malfatti'sche Problem . . . . .	I.	117
VII.	Ueber die Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Halbmessern derselben. Von Herrn Professor Rytz und Herrn Professor Mossbrugger in Aaran . . . . .	I.	118



IX.	Ueber die Fuespunktcurven der Kegelschnitte. Von dem Herrn Doctor Schütte, Lehrer an dem Pädagogium zu Putbus . . . . .	II.	175
X.	Drei geometrische Theoreme. Von Herrn Doc- tor Beer zu Bonn . . . . .	II.	202
XI.	Ueber die Quadratur elliptischer Sectoren. Fort- setzung der Abhandlung Theil XVII. Nr. XI. Von dem Herausgeber . . . . .	II.	207
XIV.	Ueber Leitlinien. Von Herrn Doctor M. Can- tor in Heidelberg . . . . .	III.	249
XXII.	Satz von den Kegelschnitten. Von Bessel .	III.	354
XXII.	Satz von der Ellipse. Von Bessel . . . .	III.	355
XXV.	Démonstration de quelques théorèmes sur la courbure des surfaces. Par Monsieur A. W. Alinga, docteur-ès-sciences à Groningue .	IV.	423
XXVI.	Referat über: „Traité de Géométrie supé- rieure par M. Chasles, membre de l'Insti- tut, Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris. (Paris, Bachelier, 1852. 8. 603.)“ Von Herrn Doctor Burghardt, Lehrer am Gymnasium zu Greifswald . . .	IV.	431
XXVII.	Beweis des Lehmus'schen Satzes: „Wenn die Geraden, die die zwei Winkel eines Dreiecks halbiren und die gegenüberliegenden Seiten schneiden, bis zu diesen Durchschnitten gleich sind und gleichartig liegen, so sind die beiden halbirten Winkel sich gleich.“ Von Herrn Hof- rath Dr. Clauaen zu Dorpat . . . . .	IV.	459
XXXI.	Schreiben des Herrn Director Nagel an der Realschule zu Ulm an den Herausgeber . .	IV.	470
XXXI.	Ueber einen geometrischen Satz. Vom Her- ausgeber . . . . .	IV.	473
XXXI.	Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes. Mit- getheilt vom Herausgeber . . . . .	IV.	480

### Praktische Geometrie.

XVII.	Ueber den Inhalt der Fässer. Von dem Her- ausgeber . . . . .	III.	301
-------	---	------	-----

Trigonometrie.

XXII.	Zwei goniometrische Relationen zwischen fünf Winkeln. Von Bessel . . . . .	III.	354
XXII.	Einfacher Beweis des Lhuillier'schen Ausdrucks für den vierten Theil des Excesses eines sphärischen Dreiecks. Von Herrn Inspector Gent zu Liegnitz . . . . .	III.	358
XXXI.	Relation im sphärischen Dreieck. Vom Herausgeber . . . . .	IV.	472

Mechanik.

V.	Ueber Foucault's Pendelversuch zum Beweise für die Umdrehung der Erde um ihre Axe. Von dem Herausgeber . . . . .	I.	97
XII.	Gleichungen der Bewegung eines Pendels auf der sich um ihre Axe drehenden Erde. Von Herrn Doctor Haedenkamp, Lehrer am Gymnasium zu Hamm . . . . .	II.	238
XX.	Démonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule, à diverses latitudes; par M. Crahay, membre de l'Académie de Belgique . . . . .	III.	345
XXI.	Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps. Note par M. Pagani, membre de l'Académie de Belgique . . . . .	III.	349

(M. s. auch Physik.)

Astronomie.

III.	Ueber Aristarchs Methode zur Bestimmung der Entfernung der Sonne von der Erde. Von dem Herausgeber . . . . .	I.	59
XVI.	Venus im grössten Glanze. Von dem Herausgeber . . . . .	III.	288



- XXII.** Mittel das Zittern des Quecksilberhorizonts bei Sextantenbeobachtungen zu beseitigen. Von den Herren Mauvais und Seguin . . . III. 353
- XXII.** Ueber den Zusammenhang der Protuberanzen bei der grossen Sonnenfinsterniss vom 28sten Juli 1851 mit den Sonnenfackeln. Von Herrn Doctor Schweizer zu Moskau . . . III. 357

### Physik.

- VI.** Apparat zu Inductionsversuchen mit der Nebenbatterie. Von Herrn Director Knochenhauer zu Meiningen . . . I. 113
- XV.** Die Nichtigkeit des Neuton'schen Luftwiderstands-Gesetzes, so wie Vorschläge zur Auffindung des wahren. Von Herrn Brenner, Lehrer zu Tuttlingen in Württemberg . . . III. 260
- XIII.** Ueber eine bei dem Sprengen der Steine bemerkte Erscheinung. Von Demselben . . . III. 352
- XXXI.** Resultate meteorologischer Beobachtungen zu Fulda von einem halben Jahrhunderte. Mitgetheilt von Herrn Geheimen Medizinalrath Dr. Schneider zu Fulda . . . IV. 479
- XXIV.** Der Winter von 1853 in Berlin, im Vergleich mit den 16 vorhergehenden Wintern, besprochen von Herrn Professor Dr. Wolfers in Berlin . . . IV. 419
- (M. s. auch Mechanik.)

### Uebungsaufgaben für Schüler.

- XXX.** Aufgabe von Herrn Professor Doctor Oskar Schlömilch an der polytechnischen Schule zu Dresden . . . IV. 468

## Literarische Berichte \*).

LXXVII.	I.	961
LXXVIII.	II.	969
LXXIX.	III.	977
LXXX.	IV.	999

---

\*) Ich bemerke hierbei, dass die literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

# I.

## Zur gründlichen Richtigstellung des Ausdruckes für das Integral

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik an der k. k. Universität zu Prag.

(Vorgetragen in der am 23. Juni 1851. gehaltenen Sitzung der königlich böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.)

In neuerer und neuester Zeit haben mehrere kritische Analytiker, mit Cauchy an der Spitze, an dem bekannten und so häufig in Anwendung kommenden Integral  $\int \frac{dx}{x}$ , dessen Differentialquotient das Umgekehrte (der reciproke Werth) der Grundveränderlichen  $x$  ist, mancherlei gegründete Anstösse gefunden, die noch nicht zur allseitigen Zufriedenstellung behoben werden konnten. Diese Befriedigung mit treffenden Gründen zu erzielen, ist der Zweck folgender Abhandlung.

### §. 1.

Dieses Integral, dessen üblicher Ausdruck

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$



wenn  $l$  die Andeutung der natürlichen Logarithmen ist, zeichnet sich durch mehrere auffallende Eigenheiten aus.

1.) Sein Integrand,  $\frac{dx}{x}$ , bleibt ungeändert, wenn man die Veränderliche,  $x$ , durch eine Proportionale,  $ax$ , ersetzt, deren constanter Verhältniss-Factor  $a$  eine beliebige, positive oder negative, reelle oder imaginäre Zahl ist. Erlaubt man sich diesen Ersatz auch in dem Logarithmand zu vollbringen, so erfolgt

$$(2) \quad \int \frac{dx}{x} = l(ax) + C.$$

In diesen willkürlichen Factor,  $a$ , darf man daher auch die arbiträre Integrationsconstante  $C$  mit einbegreifen, folglich ihn durch  $Ca$  oder durch  $\frac{a}{C}$  ersetzen, wodurch sich herausstellt

$$(3) \quad \int \frac{dx}{x} = l(Cax) = l \frac{ax}{C}.$$

Diese gleichgeltenden dreierlei Ausdrücke sind weit allgemeiner als der ursprüngliche, veranlassen aber den Anstoss, dass sie für negative und imaginäre Logarithmande imaginär ausfallen, während doch der Integrand selbst reell ist.

2.) Führt man an die Stelle der Veränderlichen eine beliebige Potenz derselben,  $x^n$ , ein, deren Exponent ( $n$ ) was immer für eine, positive oder negative, reelle oder imaginäre, ganze, gebrochene oder irrationale Zahl sein mag; so wird das Integral blos durch diesen Exponenten vervielfacht, daher wieder hergestellt, indem man das entstandene Integral durch jenen Exponenten theilt. Es ist nemlich:

$$\int \frac{d(x^n)}{x^n} = \int \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = n \int \frac{dx}{x},$$

daher umgekehrt

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{x^n};$$

und wenn man diese Abänderung auch in den Integralausdrücken (2) und (3) ausführt, findet man noch allgemeiner

$$(4) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} l(ax^n) + C = \frac{1}{n} l(Cax^n) = \frac{1}{n} l \frac{ax^n}{C}.$$

3. Jeder Logarithme ist bekanntlich eine unendlich vieldeutige complexe (binomiale imaginäre) Function, daher muss das vollkommen allgemeine Integral auch unendlich vieldeutig

min. Bedient man sich daher Cauchy's bekannter Bezeichnung, ist am allgemeinsten

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{n} l(ax^n) + C = \frac{1}{n} l(Cax^n) = \frac{1}{n} l\left(\frac{ax^n}{C}\right).$$

4) Uebergeht man von diesem unbestimmten Integral auf ein ~~W~~antes mit algebraisch entgegengesetzten Integrationsgrenzen, so kann die Auswerthung des letzteren nicht so gerade durch die übliche Einsetzung dieser Grenzen in das allgemeine Integral vollzogen werden; weil bei dem Uebergange der veränderlichen  $x$  aus dem Positiven durch Null ins Negative der Differentialcoefficient  $\frac{1}{x}$  an dem Werthe  $x=0$  unstetig (unendlich gross), das Integral selbst dagegen für  $x=0$  gleichfalls unstetig und dann für negative  $x$  imaginär wird, wofern man nicht zum Exponenten  $n$  eine gerade Anzahl gewählt hätte.

## §. 2.

Diese Wahrnehmungen haben zuerst Cauchy bewogen, in ~~seinem~~ *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, *P. I.* 1., 1823., an mehreren Stellen, wie S. 87. und 92., die Mathematiker darauf aufmerksam zu machen, dass das gewöhnliche Verfahren

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x} = l x + C$$

zu setzen nur da, wo  $x$  positiv ist, gestattet sein könne, oder dass man nur so lange

$$(6) \quad \int \frac{dx}{x} = l \frac{x}{C}$$

setzen dürfe, als die Constante  $C$  mit  $x$  gleichstimmig gewählt wird.

Ohne sich in eine tiefere Begründung einzulassen, setzt er dort, auf S. 104., 107. u. s. f., dort wo  $x$  eben so wohl negativ als positiv gedacht werden kann,

$$(7) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + C \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2} l\left(\frac{x}{C}\right)^2.$$

Seither hat er in seinen analytischen Arbeiten überall die letztere Form als die richtige beibehalten.

## §. 3.

Von Cauchy's Anhängern dürfte wohl Herr Professor Grunert der Erste dieser Ansicht offen beigetreten sein, indem er in seinen „Elementen der Differential- und Integral-Rechnung“, 2. Thl., Leipzig, 1837. S. 34., diesen Fragepunkt folgendermassen bespricht.

„Weil bekanntlich, wenn man unter der Voraussetzung, dass  $X$  reell ist, das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem  $X$  positiv oder negativ ist,

$$d\ln(\pm X) = \frac{\pm dX}{\pm X} = \frac{dX}{X}$$

ist; so ist

$$\int \frac{dX}{X} = \ln(\pm X) + C,$$

mit derselben Bestimmung wie vorher wegen des Zeichens. Um aber die durch das doppelte Zeichen verursachte Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir im Folgenden, was offenbar verstatet ist, immer

$$\int \frac{dX}{X} = \frac{1}{2} \ln X^2 + C$$

setzen.“

Hiergegen muss ich jedoch bemerken, dass die hierin versteckte successive Argumentation:

$$\ln(\pm X)$$

sei zunächst

$$= \ln \sqrt{(\pm X)^2},$$

dann

$$= \ln \sqrt{X^2},$$

endlich

$$= \frac{1}{2} \ln X^2$$

auf den Satz:

„Potenzirung und Wurzelziehung nach einerlei Exponenten, unmittelbar nach einander ausgeführt, heben sich auf“,

heißt ist, welcher laut des Begriffs der Wurzel zwar da streng gilt, wo einer Wurzelziehung die gleichhohe Potenzirung folgt, da aber unrichtig wird, wenn umgekehrt einer Potenzirung die gleichhohe Wurzelziehung nachfolgt; weil jede Wurzel bekanntlich nicht bloß eindeutig, sondern so vieldeutig ist, als ihr Exponent zählt.

Will man jedoch kritisch vorgehend

$$\pm X = (([\pm X]^2))^{\frac{1}{2}} = ((X^2))^{\frac{1}{2}}$$

setzen, so ist es bei dem Uebergange auf die Logarithmen immer gestattet, ohne weiteres

$$\lg(\pm X) = \lg((X^2))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \lg X^2$$

zu setzen; weil ja der vorletzte Ausdruck zweiförmig, der letzte aber nur einförmig ist.

In seinem „Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis, Leipzig, 1838., S. 158., Note“ wiederholt Herr Professor Grunert anfangs im Wesentlichen das Obige, nur fügt er, um sich gegen den Vorwurf „einer unnöthigen und unüberlegten Neuerung“ zu schützen, noch folgende Bemerkungen bei:

„Nach meiner Ueberzeugung ist die Formel

$$\int \frac{dX}{X} = \lg X$$

falsch, und gilt bloß in dem Falle, wenn  $X$  positiv ist, keineswegs aber auch in dem Falle, wenn  $X$  negativ ist, wie schon daraus unzweideutig hervorgehen dürfte, dass für ein negatives  $X$  bekanntlich  $\lg X$  imaginär, die Grösse  $\frac{dX}{X}$  aber reell ist, und doch wohl auf keinen Fall das Integral  $\int \frac{dX}{X}$  des reellen Differentials  $\frac{dX}{X}$  der imaginären Grösse  $\lg X$  gleich sein kann.“

Die hier in Frage gestellten Behauptungen hoffe ich im Folgenden (in § 6.) gründlich widerlegt zu haben.

Von Cauchy's Anhängern  
 nert der Erste dieser Ansicht  
 er in seinen „Elementen der  
 Rechnung“, 2. Thl., Leipzig,  
 folgendermassen bespricht.

„Weil bekanntlich, wenn ma  
 $X$  reell ist, das obere oder unter  
 positiv oder negativ ist,

$$d(\pm X) = \pm dX$$

ist; so ist

$$\int \frac{dX}{X} = \log X$$

mit derselben Bestimmung wie v  
 aber die durch das doppelte Ze  
 kelt zu vermeiden, wollen wir im  
 stattet ist, immer

$$\int \frac{dX}{X} = \log X$$

setzen.“

Hiergegen muss ich jedoch  
 steckte successive Argumentati-

$$1(\pm X)$$

sei zunächst

$$= \log X$$

dann

$$= 1$$

endlich

$$= \frac{1}{X}$$

auf den Satz:



igkeit an den mancherlei, bereits  
keiten ein gutes Beispiel sich n  
ar lange wohl nicht mehr dauern.

auf Herr Professor Schlömilch  
Literar. Ber. S. 436. 437., und wi  
dem er — worauf hier Alles ankon

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

h seine zwei Beweise noch eine ge

sen Stellen nur die begrenzten Integral  
eben so beweist er endlich die Gilt  
ne fragliche Integral in seinem „Hand  
und Integral - Rechnung, 2.  
allein auch da mangelt die unerlässliche  
des Rechtes, die Lehre von den Log  
nen mit ihnen, obwohl sie lediglich n  
mande in der Algebra erwiesen werden  
negative Logarithmande ausdehnen zu d

## §. 5.

enannten haben die anderen neueren und  
hen Schriftsteller über Integralrechnung d  
kt gar nicht berührt; selbst der um die S  
schen Arbeiten Cauchy's verdiente Mo  
sich mit der blossen Hinstellung des rich

ermuthen Manche, es sei, wenn irgendwo eine  
rüher eintreten sollte, leicht durch die Wah  
stante  $C$  abzuhelfen. In der That scheint es  
un die gewöhnliche Integrationsweise (1) ange  
negative Werthe von  $x$ , bei denen

$$\int \frac{dx}{x} = l(-x) + C$$

$$l(-x) = lx + l(-1)$$

—1) in die Constante  $C$  mit einbeziehen; oder  
egration (6) verwendet, bei welcher unter gle

## §. 4.

Dieser Ansicht schloss sich auch Herr Professor Schlömilch in mehreren seiner geistreichen und kritischen Aufsätze an, die er im Archiv veröffentlichte. Zuvörderst gehört hieher eine Stelle in einem seiner polemischen Aufsätze gegen Dr. Barfuss, 5. Bd., 1844., S. 388. Den daselbst ausgesprochenen Antithesen zwischen dem Wirklichen und algebraisch Unmöglichen kann ich jedoch, als Mitverfechter der — freilich noch wenig Gnade findenden — Ansichten eines Mourey, Warren und Gauss über die Realität der sogenannten imaginären Grössen meinen Beifall keineswegs zollen.

Darauf gab er für diese Ansichten einen eigenen Beweis im 6. Bde., 1845., S. 326 — 328. Die Grundlage desselben ist die Unveränderlichkeit des Integrals  $\int_0^u \frac{dx}{x}$ , wenn  $x$  in  $-x$  übergeht. Indess gewähren gleichwohl die einleitenden analytischen Kunstgriffe nicht die erwünschte Befriedigung, zumal man über den eigentlichen Grund doch nicht die nöthigen Aufschlüsse erhält. Zudem streitet sein  $\varphi(0)$ , welches eigentlich  $=l(0)=-\infty$  ist, mit der, durch die Bemerkung 4) in §. 1. veranlassten, Lehre Cauchy's von der Werthbestimmung indeterminirter Integrale (Résumé, p. 93 — 96.).

Gegen diesen Beweis stritt Herr Lehrer Dr. Strauch im 6. Doppelhefte, Nr. 57., der Heidelberger Jahrbücher der Literatur für 1845, S. 911 — 913., indem er Herrn Schlömilch's Verfahren eine „unnatürliche Künstelei“ nennt, und während dieser das begrenzte Integral

$$\int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(3^2) - \frac{1}{2} l(2^2) = \frac{1}{2} l \frac{9}{4},$$

also reell befunden hatte, zu dem Endresultate kommt:

„Es ist richtig:

$$\int_{+2}^{+3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l \frac{9}{4}.$$

Dagegen ist

$$\int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x} = l(+3) - l(-2)$$

imaginär, und bleibt in alle Ewigkeit imaginär.“

Nun wenn diese Ewigkeit an den mancherlei, bereits abgelaufenen, bekannten Ewigkeiten ein gutes Beispiel sich nehmen wollte, so dürfte sie so gar lange wohl nicht mehr dauern.

Ihm entgegnete hierauf Herr Professor Schlömilch im 8. Bde. des Archivs, 1846, Literar. Ber. S. 436. 437., und wies ihm seinen Irrthum nach, indem er — worauf hier Alles ankommt — darlegte, dass allgemein

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

ist; wobei freilich auch seine zwei Beweise noch eine genauere Sicherstellung bedürfen.

So wie er an diesen Stellen nur die begrenzten Integrale dieser Art berücksichtigte, eben so beweist er endlich die Giltigkeit auch für das allgemeine fragliche Integral in seinem „Handbuch der Differential- und Integral-Rechnung, 2. Thl., 1847., S. 6., 7.“ Allein auch da mangelt die unerlässliche vorläufige Nachweisung des Rechtes, die Lehre von den Logarithmen und das Rechnen mit ihnen, obwohl sie lediglich nur für absolute Logarithmande in der Algebra erwiesen werden, so geradezu auch auf negative Logarithmande ausdehnen zu dürfen.

## §. 5.

Ausser den genannten haben die anderen neueren und neuesten mathematischen Schriftsteller über Integralrechnung diesen bedenklichen Punkt gar nicht berührt; selbst der um die Sammlung der analytischen Arbeiten Cauchy's verdiente Moigno (1844) begnügt sich mit der blossen Hinstellung des richtigen Integrals.

Vielleicht vermuthen Manche, es sei, wenn irgendwo eine Bedenklichkeit darüber eintreten sollte, leicht durch die Wahl der Integrationsconstante  $C$  abzuheffen. In der That scheint es, als dürfe man, wenn die gewöhnliche Integrationsweise (1) angewendet wird, für negative Werthe von  $x$ , bei denen

$$\int \frac{dx}{x} = l(-x) + C$$

wird, nur

$$l(-x) = lx + l(-1)$$

setzen und  $l(-1)$  in die Constante  $C$  mit einbeziehen; oder wenn man die Integration (6) verwendet, bei welcher unter gleicher Annahme

$$\int \frac{dx}{x} = \ln \frac{-x}{C}$$

wird, bloss die Constante  $C$  negativ nehmen.

Auch hilft dieses Mittel wirklich, wenn die Integration zwischen gleichstimmigen, und zwar — was hier allein zu erfordern bleibt — zwischen zwei negativen Grenzen zu vollziehen ist. Denn soll das Integral bei  $x = -a$  anfangen, d. i.  $=$  Null sein, so muss vermöge (1)

$$0 = \ln(-a) + C = \ln a + \ln(-1) + C,$$

folglich

$$C = -\ln a - \ln(-1)$$

sein. Dann ist das unbegrenzte Integral

$$\int_{-a}^x \frac{dx}{x} = \ln x - \ln a - \ln(-1).$$

Soll dieses bei  $x = -b$  enden, so erfolgt, weil  $\ln(-b) = \ln b + \ln(-1)$  gesetzt werden darf, also  $+\ln(-1)$  mit  $-\ln(-1)$  sich aufhebt, das bestimmte Integral

$$(8) \quad \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

thatsächlich reell.

Will man, weil die Integrationsconstante bei diesem Hergange ohnehin herausfällt, sie nicht erst bestimmen, sondern einfach die Integrationsgrenzen einsetzen, so erhält man nach (1)

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \ln(-b) - \ln(-a) = \ln \frac{-b}{-a} = \ln \frac{b}{a}.$$

Allein hier nimmt man überall stillschweigend an, dass man berechtigt sei, mit Logarithmen negativer Zahlen gerade so wie mit denen der positiven zu rechnen, was doch vorerst noch zu erweisen bleibt. Man umgeht diese Schwierigkeit — vielleicht auch nur scheinbar — wenn man nach (6)

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \ln \frac{-b}{C} - \ln \frac{-a}{C}$$

bestimmt und hierin die willkürliche Constante  $C$ , um nur positive Logarithmande zu erhalten, in  $-C'$  verwandelt, wonach

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = l \frac{b}{C} - l \frac{a}{C} = l \left( \frac{b}{C} : \frac{a}{C} \right) = l \frac{b}{a}$$

wie früher entfällt.

Nimmt man jedoch dieses Integral innerhalb ungleichstimmiger (entgegengesetzter) Grenzen, etwa nur von  $-a$  bis  $+b$ , weil für die gegentheilige Integration von  $+a$  bis  $-b$ , mit der Entgegensetzung der Grenzen, auch das Integral selbst nur entgegengesetzt zu nehmen kommt, folglich

$$\int_{+a}^{-b} \frac{dx}{x} = - \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

ist; so wird man von beiden Aushilfsmitteln verlassen. Denn gemäss der Integrationsweise (1) erhält man

$$(9) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = l(+b) - l(-a) = l\left(-\frac{b}{a}\right)$$

und nach der Integration (6) ist

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = l \frac{+b}{C} - l \frac{-a}{C},$$

so dass man das Beziehungszeichen von  $C$  nie so wählen kann, dass beide Logarithmande positiv ausfallen; mithin ist das erwähnte begrenzte Integral nach dieser Darstellung sicher imaginär.

Allein ein begrenztes Integral, dessen Integrant für alle im Integrationsintervall gelegenen Werthe der Veränderlichen, wie im vorliegenden, reell bleibt, kann als Summe von lauter reellen Elementen nimmermehr imaginär ausfallen; mithin ist der zuletzt erhaltene imaginäre Betrag des in Rede stehenden Integrals gewiss unrichtig.

Sonach entsteht die Frage, wie alle erwähnten Widersprüche gründlich zu heben seien, und wie sofort die Integration für alle Fälle gültig durchgeführt werden müsse.

## §. 6.

Hierbei muss vor Allem — was auch sonst immer, wenn es nothwendig ist, geschehen sollte, — die allgemeine Integration von der begrenzten sorgfältigst unterschieden werden.

Die allgemeine Integration ist nichts Anderes als der Rückschritt vom Differenziren, indem sie von einem Differential zu der als früher differenzirt vorausgesetzten Function zurück-



schreitet. Sie nimmt die Bestimmung des Grenzverhältnisses der gleichzeitigen Aenderungen zweier zusammenhängender Veränderlichen als früher geschehen an, und sucht von diesem Verhältnisse der Aenderungen zurückgehend den Zusammenhang jener Veränderlichen selbst, die Abhängigkeitsweise (Function) der einen von der andern wieder herzustellen.

Nun liegt es in dem Begriffe des Differenzirens und wird danach auch in den kritischeren Lehrbüchern über Differentialrechnung, wie in jenen von Cauchy und seiner Anhänger Grunert, Moigno und Schlömilch, noch insbesondere ausführlich erwiesen, dass das Differenziren nicht minder bei imaginären als bei reellen Functionen vollführt werden könne. Hiebei wird nun das Differential einer imaginären Function im Allgemeinen freilich wieder imaginär ausfallen, allein in besonderen Fällen kann es doch auch reell werden. Denn wenn  $u, v$  reelle Functionen von  $x$  vorstellen und die  $\sqrt{-1}$  mit  $i$  bezeichnet wird, so ist die allgemeine Form einer imaginären Function dieser Veränderlichen

$$= u + iv,$$

daher ihr Differential

$$d(u + iv) = du + idv = \left( \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx} \right) dx.$$

Dieses wird nun, da  $\frac{dv}{dx}$  nicht nothwendig jederzeit Null sein muss, sondern im Gegentheil gewöhnlich von Null verschieden sein wird, im Allgemeinen imaginär werden. Allein weil  $\frac{dv}{dx}$  doch auch ausnahmsweise Null sein kann, dann nemlich, wenn die Function  $v$  nur annahmsweise nicht aber in der That von  $x$  abhängt, oder ein Ausdruck von  $x$  ist, aus dem bei zureichender Reduction diese Veränderliche gänzlich herausfällt; so kann das Differential einer imaginären Function doch auch zuweilen reell ausfallen.

Mithin kann auch umgekehrt das *allgemeine* Integral eines reellen Differentials gleichwohl imaginär sein.

Bei dem allgemeinen Integriren ist demnach ein Sichbeschränken auf reelle Integralförmungen allein ganz und gar ungegründet, sobald nur die Zulässigkeit des Rechnens mit solchen imaginären Formen in früheren Doctrinen gerechtfertigt worden ist.

Nun wird aber in der That in den Lehrbüchern über algebraische Analysis die Befugniss mit den imaginären Logarithmen negativer Zahlen wie mit den reellen Logarithmen positiver Zahlen zu rechnen ausdrücklich dargelegt; somit unterliegt es keinerlei Anstand von dem reellen Differential  $\frac{dx}{x}$  das allgemeine Integral

in der imaginären Form  $l(-x)$  darzustellen, die als vieldeutig auch durch  $l((-x))$  ausgedrückt werden kann. Denn indem man

$$\int \frac{dx}{x} = l((-x)) + C$$

setzt, erhält man bekannter Massen noch ferner, wenn man den absoluten Werth der Zahl  $x$  durch val. abs.  $x$  andeutet,

$$\int \frac{dx}{x} = l(\text{val. abs. } x) + l((-1)) + C$$

oder

$$= l(\text{val. abs. } x) + C + i(2r+1)\pi,$$

wo  $r$  eine positive oder negative Grenzzahl vorstellt. Verbindet man damit die Betrachtung, dass auch das für positive  $x$  geltende übliche Integral (9) in die ähnliche Form

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= l((+x)) + C \\ &= l(\text{val. abs. } x) + l((+1)) + C \\ &= l(\text{val. abs. } x) + i2r\pi + C \end{aligned}$$

gebracht werden kann; so lassen sich beide Integrale vereinen in der Form

$$(10) \quad \int \frac{dx}{x} = l(\text{val. abs. } x) + C' + iC'',$$

wenn man die Constante  $C$  complex wählt und das Reelle von dem Imaginären scheidet. Und jedes dieser Integrale gibt differenziert das zur Integration vorgelegt gewesene Differential  $\frac{dx}{x}$ .

Für die allgemeine Integration sind sonach auch die gekünstelten Gestaltungen (2) bis (5) des Integrals ohne Werth, weil sie ja alle bei genügender Reduction und bei der Ausscheidung des Constanten doch immer wieder auf die einfache Form (1) zurückgebracht werden können.

Hat man dann auch noch für jede reelle oder imaginäre Form

$$X = \varphi(x) + i\psi(x)$$

erwiesen, dass

$$d l X = \frac{dX}{X}$$

ist; so ist bei allgemeiner Integration auch

$$\int \frac{dX}{X} = \ln X + C;$$

wie z. B.

$$\int \frac{dx}{x - a \pm ib} = \ln(x - a \pm ib) + C,$$

wo jedoch die Constante  $C$  jederzeit als complex vorauszusetzen ist.

### §. 7.

Bei der besonderen oder begrenzten Integration dagegen, wie sie bei der Auflösung zumeist geometrischer, mechanischer und physikalischer Aufgaben vorkommt, sucht man nicht sowohl aus dem gegebenen Differentialverhältnisse diejenige Function wieder zurück, welche differenzirt dieses Verhältniss liefert; sondern man fragt vielmehr nach der Summe — dem Integrum — sämtlicher successiven Aenderungsbeträge, welche die gesuchte Function erfährt, während die Grundveränderliche von ihrer unteren Grenze zur oberen stetig vorschreitet, und welche einzeln nach Anweisung des zu integrierenden Differentials berechnet werden können. Mithin ist diese Rechnungsweise mit der allgemeinen Integration zwar im üblichen Namen verwandt, allein im Grundbegriffe, in der Tendenz und Ausführung, von ihr wesentlich verschieden.

Bei ihr sind die einzelnen schrittweisen, stetig in einander übergehenden Aenderungsbeträge, die unendlich kleinen Elemente der gesuchten Function, folglich auch die ihnen gleichgeltenden stetig successiven Werthe des Integrands, eben so wie die Veränderliche und ihre Function, durchweg reell zu denken. Um nach der Gauss'schen Ansicht über die Realität der imaginären Grössen zu sprechen, während man bei der allgemeinen Integration auf einer ganzen unbegrenzten Ebene alle algebraischen Operationen ausführt, zieht man sich bei der begrenzten Integration auf eine einzige Gerade dieser Ebene zusammen. Auf dieser entfällt alles Seitliche (Laterale) — Imaginäre — und nur das Directe (das Geradaus) — das Reelle — bleibt verfügbar; alle Grössen, die beiden zusammenhängenden Veränderlichen, der Differentialcoefficient und das Integral, müssen in den Grenz- und Zwischenwerthen durchgehends reell sein, wenn anders ein solches Summirungsgeschäft der nach einander folgenden Aenderungsbeträge (Zusätze, Elemente) einen klaren Sinn, eine deutliche Auffassung, in der Wirklichkeit zulassen soll.

Mithin darf bei dem begrenzten Integriren kein Satz, der nur für das Rechnen mit reellen Zahlen erwiesen worden ist, ohne weiteres

auch für imaginäre Zahlen gelten gelassen werden. Dieser in der höheren Analysis leider noch immer so häufig wahrnehmbare Fehler trägt auch bei der vorliegenden begrenzten Integration des Differentials  $\frac{dx}{x}$  die Hauptschuld des eingeschlichenen Irrthums; weil man in ihr die imaginären Logarithmen negativer Zahlen zulässt und mit ihnen anstandslos rechnet, wogegen doch nur absolute logarithmische Grundzahlen, folglich auch nur positive Logarithmande, in den Voraussetzungen und in der algebraischen Lehre vom Logarithmiren zugestanden worden wären.

### §. 8.

Nach Aufstellung dieser unbestreitbar richtigen leitenden Principien nehmen wir nun das fragliche Integral  $\int \frac{dx}{x}$  nochmal, und zwar zur völligen Sicherstellung auf mehrere Weisen, zu integrieren vor.

**I. Erstes Integrations-Verfahren:** Integration mittels unbestimmter Functionen.

Nehmen wir — was bekanntlich genügt — ein particuläres Integral des Differentials  $\frac{dx}{x}$  in Betracht, dessen sonst arbiträre Constante hier eine bestimmte Zahl sein soll; so möge der vollständige Ausdruck dieses (particulären) Integrals, mit Einschluss seiner Constante, die dermalen noch unbestimmte Function  $f(x)$ , also das Integral

$$(11) \quad \int \frac{dx}{x} = f(x)$$

sein.

Die Bestimmung dieser Function  $f$  kann nun auf folgende Weisen geschehen.

a). Erste Bestimmungsweise der Function  $f(x)$ . Setzen wir für  $x$  die Potenz  $x^n$ , in welcher der Exponent  $n$  jede reelle Zahl vorstellen, jedoch lediglich der reelle Werth der im Allgemeinen vieldeutigen Potenz berücksichtigt werden darf; so wird

$$\int \frac{d.x^n}{x^n} = f(x^n),$$

folglich wenn man differenzirt und reducirt

$$n \int \frac{dx}{x} = f(x^n).$$

Da hier  $\int \frac{dx}{x}$  wieder das obige particuläre Integral  $f(x)$  vorstellt, so bleibt es verstatet, auch hier dasselbe durch  $f(x)$  zu ersetzen und somit erfolgt

$$(12) \quad nf(x) = f(x^n)$$

als die eigentlich aufzulösende Functionalgleichung.

Um darin die zwei Veränderlichen  $x$  und  $n$  zu schneiden, sei

$$x^n = z$$

eine neue Veränderliche, und nehmen wir beiderseits die natürlichen Logarithmen. Dann fordert die — ja nicht zu übersehende — Bedingung, dass  $x$  und  $z$  zwar reell sein sollen, aber gleich wohl eben so gut negativ als positiv sein können, und die Grundbedingung, dass bei durchgängig reellem Rechnen die Logarithmande, gleich den logarithmischen Grundzahlen, nur positiv — oder vielmehr irrelativ (absolut) — gedacht werden können, die unabweisliche Vorbereitung, beide letzten gleichen Zahlen zu einer geraden Potenz, also am einfachsten zur möglich niedersten, d. i. zur zweiten Potenz, zu erheben, also auf

$$(x^n)^2 = z^n$$

zu übergehen. Da bei der ersten Potenzirung, selbst wenn der Exponent  $n$  gebrochen oder irrational sein sollte, nur mehr der reelle Werth zu berücksichtigen bleibt, so ist, zufolge der algebraischen Lehren von den Wurzeln und den Potenzen mit gebrochenen Exponenten, die Verwechslung der vorgeschriebenen zwei nach einander folgenden Potenzirungen gestattet, mithin auch

$$(x^2)^n = z^2.$$

Hier nun, wo beide zu logarithmirenden Zahlen positiv sind, dürfen wir mit vollem Recht logarithmiren und erhalten sofort

$$nl(x^2) = l(z^2).$$

Obige Functionalgleichung (12) übergeht aber durch die Einführung der  $z$  in

$$nf(x) = f(z),$$

folglich, durch die vorangehende Gleichung getheilt, verwandelt sie sich in

$$\frac{f(x)}{l(x^2)} = \frac{f(z)}{l(z^2)}$$

wo nun — wie beabsichtigt — die  $x$  und  $z$  von einander geschieden sind. Da diese beiden Veränderlichen von einander unabhängig sind, so erheischt die letzte Gleichheit, dass beide gleichen



Verhältnisse eine und dieselbe von  $x$  und  $z$  unabhängige Zahl, z. B.  $A$ , seien, folglich

$$\frac{f(x)}{l(x^2)} = A$$

sei. Dann ergibt sich die gesuchte Function

$$(13) \quad f(x) = Al(x^2).$$

Zur Bestimmung der noch in Frage bleibenden Constante  $A$  bemerken wir, dass die Function  $f(x)$ , vermöge der Gleichung (11) an die Bedingung gebunden ist, dass ihr Differential dem Integrand  $\frac{dx}{x}$  gleiche, also auch, dass ihr Differentialverhältniss  $f'(x)$  dem Differentialcoefficienten  $\left(\frac{1}{x}\right)$  dieses Integrands gleich, nemlich

$$(14) \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

sei. Wie berechnet man aber hier  $f'(x)$  oder  $\frac{dl(x^2)}{dx}$ ?

Es kann nemlich nicht erlaubt sein, wofern unsere Rechnungen stets auf dem Boden der reellen Zahlen sich bewegen sollen,  $l(x^2)$  in  $2lx$  aufzulösen und danach  $lx$  in üblicher Weise zu differenzieren, weil ja für ein negatives  $x$  der  $lx$  imaginär entfiel. Wir müssen also nach der allgemeinen Formel

$$\frac{dlu}{dx} = \frac{dlu}{du} \frac{du}{dx}$$

differenzieren, in welcher der Logarithmand  $u$  eine stets positiv bleibende Function von  $x$  vorstellt. Da erhalten wir nun ohne Anstand für  $u=x^2$

$$\frac{dlu}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x^2}$$

und

$$\frac{du}{dx} = 2x,$$

folglich

$$\frac{dl(x^2)}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}.$$

Mithin ist

$$f'(x) = A \frac{d l(x^2)}{dx} = A \frac{2}{x}$$

und nach obiger Bedingung (14)

$$A \frac{2}{x} = \frac{1}{x}.$$

Da hier  $x$  eine beliebige reelle Veränderliche ist, so muss

$$2A=1,$$

also

$$A = \frac{1}{2}$$

sein.

Substituiren wir nun diesen Werth in (13), so finden wir die gewünschte Function

$$(15) \quad f(x) = \frac{1}{2} l(x^2),$$

und wenn wir sie in den Ausdruck (11) einführen und zugleich von diesem particulären Integrale auf das vollständige Integral übergehen, finden wir für dieses

$$(16) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + C.$$

## §. 9.

b). Zweite Bestimmungsweise der Function  $f(x)$ . Setzen wir in der Gleichung (11) für  $x$  das Product  $uv$  zweier entweder von einander unabhängigen oder, wenn man lieber will, von einer dritten freien Veränderlichen  $t$  zugleich abhängender reellen Factoren  $u$  und  $v$ , so übergeht sie in

$$\int \frac{d.uv}{uv} = f(uv).$$

Differenzirt und theilt man, so erfolgt

$$\int \left( \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \right) = f(uv),$$

und insofern es gestattet ist,  $u$  und  $v$  zugleich als Functionen von  $t$  anzusehen und sofort die gliederweise Integration vorzunehmen

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{dv}{v} = f(uv),$$

daher wegen der vorausgesetzten Particularität des Integrals (11)

$$f(u) + f(v) = f(uv).$$

Diese Functionalgleichung in bekannter elementarer Weise (z. B. nach Cauchy Cours d'analyse, 1821, Chap. V. §. 1. Probl. 3.) aufgelöst gibt, jedoch blos für positive Werthe von  $u$  und  $v$ ,

$$f(u) = A \ln u,$$

worin  $A$  constant ist.

Setzt man hierin, weil  $x$  eben, so wohl negativ als positiv sein kann, eine stets positiv ausfallende gerade, also am einfachsten die zweite, Potenz derselben für  $u$ , nemlich  $u = x^2$ , so ist

$$f(x^2) = A \ln(x^2).$$

Nun gibt die Gleichung (11), wenn man  $x$  in  $x^2$  umsetzt,

$$\int \frac{d \cdot x^2}{x^2} = f(x^2),$$

folglich

$$f(x^2) = \int \frac{2x dx}{x^2} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

und gemäss eben dieser Gleichung (11), weil in ihr  $f(x)$  ein particuläres Integral von  $\frac{dx}{x}$  vorstellt,

$$f(x^2) = 2f(x).$$

Sofort ist

$$2f(x) = A \ln(x^2)$$

und

$$f(x) = \frac{A}{2} \ln(x^2).$$

Für die Ermittlung der noch unbestimmten Constante  $A$  dient wieder die Bedingung (11) und die ihr daselbst folgende Differentiation, und demgemäss ist

$$\frac{1}{x} = \frac{A}{2} \cdot \frac{d \ln(x^2)}{dx} = \frac{A}{2} \cdot \frac{2}{x} = \frac{A}{x},$$

mithin, da diese Gleichung für alle reellen Werthe von  $x$  identisch sein soll, findet man

$$A=1,$$

und wieder wie früher

$$(15) \quad f(x) = \frac{1}{2} l(x^2),$$

und sonach das dortige vollständige Integral (16).

## §. 10.

### II. Zweites Integrations - Verfahren. Integration durch Substitution.

Bezeichnen wir, zur Abkürzung, das gesuchte Integral durch  $y$ , setzend

$$y = \int \frac{dx}{x}$$

und nehmen wir uns vor, einen Logarithmus der Veränderlichen  $x$  einer neuen Veränderlichen gleich zu stellen; so ist es, weil  $x$  nicht bloß positiv, sondern auch negativ sein kann, keineswegs gestattet, geradezu von  $x$  selbst den Logarithmen zu nehmen, wohl aber von ihrer zweiten Potenz,  $x^2$ , weil diese jedenfalls positiv, also logarithmirbar ausfällt. Setzen wir demnach, natürliche Logarithmen anwendend,

$$l(x^2) = z;$$

so ist, wenn  $e$  die Grundzahl solcher Logarithmen vorstellt,

$$x^2 = e^z.$$

Dies differenzirt liefert

$$2x \cdot dx = e^z \cdot dz,$$

und wenn man dividirt und noch halbt

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} dz.$$

Somit wird

$$y = \frac{1}{2} \int dz = \frac{1}{2} z + C,$$

daher, wenn man zurück substituirt

$$y = \frac{1}{2} l(x^2) + C,$$

und wie oben

$$(16) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) + C.$$

### §. 11.

### III. *Drittes Integrationsverfahren.* Individualisierung eines generellen Integrals.

Schreiben wir das gesuchte Integral, indem wir  $\frac{1}{x}$  als die Potenz  $x^{-1}$  darstellen, in der Form

$$y = \int x^{-1} dx,$$

als selbst ein individueller Fall des bekannten generellen In-

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

für den individuellen Werth  $n+1=0$  oder  $n=-1$ .

Um diesen zu ermitteln, weil der Bruch  $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ , wenn man geradehin  $n+1=0$  setzen wollte, die unbestimmte Form  $\frac{0}{0} = \frac{1}{0}$  annehmen würde, schlage ich folgendes Verfahren ein, das ich bisher nirgends verwendet gefunden habe.

**1ste Bestimmungsweise.** Ich sehe 0 als den Grenzwert der Veränderlichen  $n+1$  an, wonach  $x^{n+1}$  der Grenze 1 zustrebt; und benütze die bekannte Erlaubniss, dem veränderlichen Theile jedes Integrals eine beliebige Constante zu addiren oder zu subtrahiren, indem ich von  $x^{n+1}$  seinen Grenzwert 1 abziehe, folglich setze

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1} - 1}{n+1} + C.$$

Um die Schreibung zu vereinfachen, mache ich

$$n+1=m, \quad \text{also} \quad n=m-1$$

erhalte

$$\int x^{m-1} dx = \frac{x^m - 1}{m} + C.$$

Zum Uebergang auf das Integral  $\int x^{-1} dx$  lasse ich nun die Zahl  $m$  der Grenze 0 stetig zueilen oder unendlich abnehmen; dabei finde ich

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int x^{m-1} dx = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{x^m - 1}{m} + C,$$

oder weil die erstere Grenze

$$= \int x^{\lim m - 1} dx = \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}$$

ist,

$$\int \frac{dx}{x} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{x^m - 1}{m} + C.$$

Nun ist aber bekanntlich, wenn  $a$  eine positive von  $\omega$  unabhängige Zahl vorstellt,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a^\omega - 1}{\omega} = \ln a.$$

Allein in  $x^m$  ist  $x$  hier nicht bloß positiv, sondern auch negativ, daher darf man diese Grenzform nicht geradehin verwenden. Wohl aber ist  $x^2$  jedenfalls positiv. Setze ich demnach  $a = x^2$ , so ist  $a^\omega = x^{2\omega}$ . Wähle ich ferner  $2\omega = m$ , also  $\omega = \frac{m}{2}$ ; so ist  $a^\omega = x^m$  und zugleich mit  $\lim m = 0$  auch  $\lim \omega = 0$ . Sohin erfolgt anstandslos

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{x^m - 1}{m} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a^\omega - 1}{2\omega} = \frac{1}{2} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a^\omega - 1}{\omega} = \frac{1}{2} \ln a = \frac{1}{2} \ln(x^2),$$

und daher wie früher

$$(16) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2) + C.$$

## §. 12.

**2te Bestimmungsweise.** Gewöhnlich hat man bisher, die vorher erwähnte Erlaubniss benützend, von  $x^{n+1}$  die gleichhohe Potenz einer beliebigen beständigen Zahl  $b$ , also  $b^{n+1}$ , abgezogen, folglich



$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1} - b^{n+1}}{n+1} + C$$

angenommen, dann, weil der entstandene Bruch für  $n+1=0$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  annimmt, seinen Zähler und Nenner einzeln nach  $n$  differenziert und hierin erst  $n+1=0$  gesetzt.

Allein

$$\frac{d(x^{n+1} - b^{n+1})}{dn} = \frac{d(x^{n+1})}{dn} - \frac{d(b^{n+1})}{dn}$$

darf man, weil Alles reell bleiben muss, keineswegs wie gewöhnlich so differenzieren, dass man ohne weiteres

$$\frac{d \cdot x^{n+1}}{dn} = x^{n+1} \cdot |x, \quad \frac{d \cdot b^{n+1}}{dn} = b^{n+1} \cdot |b$$

geht. Denn die bekannte Ableitung

$$\frac{d \cdot a^x}{dx} = a^x | a$$

gilt für lauter reelle Zahlen, dass in der Exponentiellen  $a^x$  die Grundzahl  $a$  positiv sei.

Um daher die Exponentiellen  $x^{n+1}$ ,  $b^{n+1}$  auf positive Grundzahlen zurückzuführen, setzen wir  $n+1=2m$ , folglich

$$x^{n+1} = x^{2m} = (x^2)^m \quad \text{und} \quad b^{n+1} = b^{2m} = (b^2)^m,$$

mach

$$\int x^n dx = \frac{(x^2)^m - (b^2)^m}{2m} + C$$

wird. Differenzieren wir demnach Zähler und Nenner des letzten Bruches nach der mit  $n+1$  zugleich verschwindenden Veränderlichen  $m$ , so erhalten wir

$$\int x^n dx = \frac{(x^2)^m | (x^2) - (b^2)^m | (b^2)}{2} + C$$

gilt für

$$n = -1 \quad \text{und} \quad m = 0;$$

hier nach wirklich vollzogener Substitution

$$\int x^{-1} dx = \frac{|(x^2) - | (b^2)}{2} + C.$$

Wenn man endlich die Constante  $-\frac{1}{2}l(b^2)$  in die Constante der Integration mit einbegreift, so erhält man wieder das Integral (16).

**Schlussergebniss der Integration.** Nach dieser so vollständig sichtsamen Beweisführung kann daher, wenn durchweg nur reellen Zahlen gerechnet werden soll, was bei dem s. g. begrenzten oder bestimmten Integriren jederzeit geschehen muss, lediglich blos

$$(16) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}l(x^2) + C$$

gesetzt werden.

### §. 13.

Wenden wir uns nunmehr zu den begrenzten Integralen, so gewahren wir auf der Stelle, dass in dem vorliegenden Integral (16) sowohl der Differentialcoefficient  $\frac{1}{x}$  als auch der Integralausdruck  $\frac{1}{2}l(x^2)$  für  $x=0$  unstetig, namentlich  $=\pm\infty$  wird, weswegen die gewöhnliche Ermittlung des Werthes eines solchen Integrals in denjenigen Fällen, wo  $x=0$  im Intervall der Integrationsgrenzen liegt, folglich diese Grenzen algebraisch entgegen gesetzt sind, unstatthaft wird, und wir daher zur ursprünglichen und eigentlichen Bedeutung des begrenzten Integrals unsere Zuflucht nehmen müssen. Nach dieser Bedeutung gilt nun bekanntlich, wenn das begrenzte Integral

$$\int_{x_0}^X \varphi(x)dx$$

kurz mit  $J$  bezeichnet, der Grenzenunterschied  $X-x_0$  in eine, dem unendlichen Wachstums fähige, Anzahl ( $n$ ) gleicher Theile, deren jeder  $=\varepsilon$  sein soll, getheilt gedacht wird, so dass

$$\frac{X-x_0}{n} = \varepsilon$$

und

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon = 0$$

ist, der Ausdruck

$$J = \int_{x_0}^X \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon [\varphi(x_0) + \varphi(x_0 + \varepsilon) + \varphi(x_0 + 2\varepsilon) + \dots + \varphi(x_0 + (n-1)\varepsilon)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{r=0}^{n-1} \varphi(x_0 + r\varepsilon),$$

annimmt, dass  $\varphi(x)$  von  $x=x_0$  bis  $x=X$  seine Stetigkeit nicht einbüsst.

### §. 14.

Um aber für den, gerade in der vorliegenden Frage in Anwendung kommenden, Fall der Unterbrechung dieser Stetigkeit das Erforderliche vorzukehren, ändern wir beide Grenzen  $x_0$ ,  $X$  in die algebraisch entgegengesetzten  $-x_0$ ,  $-X$  ab, und bezeichnen das entstehende Integral durch  $J'$ , so dass

$$J' = \int_{-x_0}^{-X} \varphi(x) dx$$

Um wieder auf die früheren Grenzen zurückzukehren, setzen wir

$$x = -z, \quad dx = -dz, \quad z = -x;$$

nach für

$$x = -x_0 \quad \text{die} \quad z = x_0$$

und für

$$x = -X \quad \text{die} \quad z = X$$

erfolgt. Demgemäss wird

$$J' = - \int_{x_0}^X \varphi(-z) dz,$$

hier wenn wir — was erlaubt ist — die Veränderliche  $z$  wieder durch  $x$  ersetzen,

$$-J' = \int_{x_0}^X \varphi(-x) dx,$$

und somit nach dem oben in (17) aufgestellten Ausdrucke

$$\begin{aligned}
 (18) \quad -J' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \{ \varphi(-x_0) + \varphi[-(x_0 + \varepsilon)] + \varphi[-(x_0 + 2\varepsilon)] + \dots \\
 &\quad \dots + \varphi[-(x_0 + \overline{n-1}\varepsilon)] \} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{r=0}^{r=n-1} \varphi[-(x_0 + r\varepsilon)].
 \end{aligned}$$

Addiren wir sofort die beiden Ausdrücke (17) und (18), so ergibt sich

$$(19) \quad J - J' = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{r=0}^{r=n-1} \{ \varphi(x_0 + r\varepsilon) + \varphi[-(x_0 + r\varepsilon)] \}.$$

So oft aber die Function  $\varphi(x)$ , wie eben im vorschwebenden Falle, wo

$$(20) \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}$$

ist, so geartet ist, dass

$$(21) \quad \varphi(-x) = -\varphi(x)$$

sich ergibt, also

$$(22) \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$$

wird, so muss auch der allgemeine Summand

$$\varphi(x_0 + r\varepsilon) + \varphi[-(x_0 + r\varepsilon)] = 0$$

werden, d. i. die gleichvielen Elemente

$$\varepsilon \varphi(x_0 + r\varepsilon) \text{ und } \varepsilon \varphi[-(x_0 + r\varepsilon)]$$

der zwei Integrale  $J$  und  $-J'$  müssen gleich, aber entgegengesetzt ausfallen, mithin summirt sich wechselseitig ganz aufheben. Da überdies beide Integrale oder Summen gleichviel Glieder enthalten, so müssen sie vereint sich gänzlich vernichten, folglich streng gültig

$$J - J' = 0$$

sein.

Sonach ist

$$J = J',$$

nemlich

$$(23) \quad \int_{x_0}^X \varphi(x) dx = \int_{-x_0}^{-X} \varphi(x) dx,$$

so oft die Function  $\varphi(x)$  eine der einander gleichgeltenden Eigenschaften (21) und (22) besitzt.

## §. 15.

Nachdem wir diese wichtigen Sätze über die Ermittlung der Werthe ins Gedächtniss zurückgerufen haben, kehren wir zu unserem Integral zurück, particularisiren die Gleichung (23) nach der Annahme (20), und erhalten sofort vollkommen richtig

$$(24) \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x} = \int_{-x_0}^{-X} \frac{dx}{x}.$$

Seien  $a, b$  gewisse Absolutzahlen und setzen wir

$$x_0 = +a, \quad X = +b;$$

also

$$-x_0 = -a, \quad -X = -b;$$

erfolgt

$$(25) \quad \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x}.$$

Bei einstimmigen Grenzen ist daher der Werth des begrenzten Integrals von  $\frac{dx}{x}$  der nemliche, mögen die Grenzen beide positiv oder beide negativ sein.

Weil hier die Auswerthung des Integrals durch den gewöhnlichen Uebergang vom allgemeinen Integral zum begrenzten geschehen darf, da im Grenzenintervall weder der Differentialcoefficient noch das Integral die Stetigkeit verliert; so erhält man vermöge des Integrausdruckes (16) anstandslos

$$(26) \quad \begin{aligned} \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} &= \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2} l(b^2) - \frac{1}{2} l(a^2) = \frac{1}{2} l\left(\frac{b}{a}\right)^2. \end{aligned}$$

## §. 16.

Um aber das, dem bekannten Anstande unterliegende, Integral mit entgegengesetzten Grenzen zu ermitteln, setzen

wir, indem wir abermals  $a$  und  $b$  absolute Zahlen bedeuten lassen, in (28)

$$x_0 = +a, \quad X = -b$$

und erhalten

$$(27) \quad \int_{+a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

woraus erhellet, dass es hinreichen werde, nur das zweite Integral mit negativer unterer Grenze zu bestimmen.

Ist nun

$$a > b, \quad \text{also} \quad -a < -b,$$

so ist das noch zu ermittelnde Integral

$$(28) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} + \int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x},$$

insofern  $-b$  zwischen  $-a$  und  $+b$  liegt.

Ist aber

$$a < b,$$

so findet man für dasselbe Integral

$$(29) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} + \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

weil hier  $+a$  zwischen  $-a$  und  $+b$  liegt.

Es kann demnach jedes Integral mit entgegengesetzten Grenzen auf eines mit gleichstimmigen im Allgemeinen ungleichen Grenzen und auf eines mit entgegengesetzten aber gleichen Grenzen zurückgebracht werden. Da ersteres nach §. 15 berechnet werden kann, so fragt es sich nur noch um das letztere, nemlich um

$$(30) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x},$$

weswegen wir dieses umständlich feststellen müssen.

## §. 17.

Die Gleichung (25) verwandelt sich, wenn wir den zweiten Teil in den ersten übertragen und anstatt seiner Zeichenänderung die bekanntlich da zulässige Umstellung seiner Grenzen nehmen, in

$$\int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} + \int_{+b}^{+a} \frac{dx}{x} = 0.$$

Addiren wir biezue beiderseits

$$\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x},$$

so ergibt, weil die Integrationsgrenzen  $-a, -b; -b, +b; +b, +a$  einander hangen, die Summirung in bekannter Weise

$$(31) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x}.$$

Man ist jedes begrenzte Integral eine Function seiner Grenzen, mithin haben vermöge dieser Gleichheit die entgegengesetzt gleichen Grenzen bei dem fraglichen Integral keinen Einfluss auf den Werth des begrenzten Integrals; und sonach ist dieser Werth eine constante Zahl, die wir mit  $A$  bezeichnen wollen, so dass

$$(32) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = A$$

von  $a$  ganz und gar unabhängig sein soll.

Von der Richtigkeit der Gleichung (31) kann man sich auch auf folgende Weise überzeugen. Setzt man im Integral (30)

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{b},$$

unter  $z$  eine neue Veränderliche und unter  $b$  eine neue ganz beliebige Beständige verstehend; so ist

$$\frac{dx}{a} = \frac{dz}{b}, \quad \text{also} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$

und für

$$x = \pm a \quad \text{wird} \quad z = \pm b;$$

folglich findet man

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{z},$$

welches wieder die Gleichung (31) ist, da die Bezeichnung der Veränderlichen im begrenzten Integral gleichgiltig ist.

### §. 18.

Zur Bestimmung der in Frage gestellten, für unsere Untersuchung höchst wichtigen constanten Zahl  $A$  dienen nun mehrere Vorgänge.

1ste Bestimmungsweise von  $A$ . Da  $a$  in (32) willkürlich sein kann, so ist es wohl sehr natürlich, die Annahme  $a = 0$  zu versuchen, bei welcher sicher richtig

$$(33) \quad A = \int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x}$$

ist, und nur noch zu entscheiden bleibt, welchen Wert  $\int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x}$  habe.

Nun setzen Cauchy, Navier, Duhamel und Schlömilch in ihren Untersuchungen über die begrenzten Integrale der unstetig werdenden Differentialformeln, stillschweigend, und ohne zwischen  $-0$  und  $+0$  zu unterscheiden, dieses Integral geradezu gleich Null. Jeder kritische Analytiker weist aber recht wohl, dass diese Unterscheidung zwischen  $-0$  und  $+0$  nicht überall ohne weiteres unterlassen werden darf, möge auch minder sorgsame Rechner solche Distinction — um eine gegen mich gerichtet gewesenen tadelnden Ausdruck eines bereitwilligen verewigten mathematischen Collegen zu gebrauchen — eine mühselige Haarspalterei zu nennen belieben.

Man kann sich hievon leicht überzeugen, wenn man in (33)

$$x = -\frac{1}{v}, \quad \text{also} \quad dx = \frac{1}{v^2} dv,$$

und für

$$x = \pm 0 \quad \text{sofort} \quad v = -\frac{1}{x} = \mp \infty$$

setzt. Da erfolgt auf der Stelle



$$A = \int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x} = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dv}{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

und also im ersten Integrale die Integrationsgrenzen zusammenfallen, liegen sie im letzten über alle Massen weit voneinander. Ueber die letztere Bedenklichkeit lässt sich aber gewiss nicht so unbekümmert hinweggehen.

Die andere Bedenklichkeit tritt hier der Entscheidung entgegen, wenn man das Integral (33) nach der Formel (17) zu berechnen versucht. Denn da ist

$$x_0 = -0, \quad X = +0, \quad \text{also} \quad \varepsilon = +0,$$

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\varphi(-x_0) = \frac{1}{-x_0} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

die zu summirenden Elemente  $\varepsilon\varphi(x_0)$  und  $\varepsilon\varphi(-x_0)$  unbegrenzt gross, und die, dem begrenzten Integral gleiche, Summen nicht mit entschiedener Sicherheit angebar.

Die Bestimmungsweise. Da in dem gesuchten Integral die Grenze  $a$  gleichgiltig ist, so setzen wir zur Vereinfachung der Rechnungen  $a=1$ , und beschäftigen uns daher mit dem, auch Cauchy (im Résumé p. 95.) erforschten, Integral

$$(35) \quad A = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}.$$

Wir setzen wir

$$x = u^n,$$

wobei  $n$  willkürlich constant denkend. Dann ist

$$dx = n u^{n-1} du,$$

$$\frac{dx}{x} = n \frac{du}{u}.$$

Da weil  $u = x^{\frac{1}{n}}$  ist, so muss zu  $x = \pm 1$  die  $u = (\pm 1)^{\frac{1}{n}}$  gehören. Da nun sehen wir uns aufgefordert die Zahl  $n$  zu wählen,

und finden sogleich, dass wir jeder Zweideutigkeit ausweichen, wenn wir  $\frac{1}{n}$  eine ungerade Zahl sein lassen. Setzen wir daher  $\frac{1}{n} = 2r+1$ , indem wir  $\pm r = 0, 1, 2, \dots$  bedingen; so erhalten wir die Integrationsgrenzen  $u = \pm 1$ , folglich nach vollzogenen Substitutionen

$$A = \frac{1}{2r+1} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{u} = \frac{1}{2r+1} A.$$

Hieraus finden wir jedoch sogleich

$$2r \cdot A = 0,$$

mithin da  $2r$  nicht allein Null, sondern auch jede (positive negative) gerade Zahl vorstellen kann, mit Sicherheit

$$A = 0.$$

Wählen wir noch vorsichtsweise für  $\frac{1}{n}$  eine gerade  $2r$ , so ist  $x^{2r} = u$  sicher positiv,

$$2rx^{2r-1}dx = du,$$

daher

$$2r \cdot \frac{dx}{x} = du,$$

und für  $x = \pm 1$  jedenfalls die  $u = +1$ , folglich

$$A = \frac{1}{2r} \int_{+1}^{+1} du = \frac{1}{2r} (+1 - (+1)) = 0.$$

Also auch da finden wir  $A = 0$ .

3te Bestimmungsweise. Benützen wir wieder die §. 10. schon gebrauchte Substitution, so erhalten wir für  $x = \pm 1$  die  $z = k(a^2)$ , daher allgemein

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int dz = \frac{1}{2} z,$$

folglich begrenzt

$$A = \frac{1}{2} \int_{k(a^2)}^{k(a^2)} dz = \frac{1}{2} [k(a^2) - k(a^2)] = 0.$$

4te Bestimmungsweise. Setzen wir in dem Ausdrucke (17)  $x_0 = -a$ ,  $X = +a$  und  $n = 2m$ , theilen wir nemlich jede Halbscheid des Intervalls der Integrationsgrenzen in  $m$  gleiche Theile; so wird ein solcher Theil

$$\frac{2a}{2m} = \frac{a}{m} = \varepsilon,$$

folglich

$$J = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) dx = \lim_{m=0} \varepsilon \sum_{r=0}^{r=2m} \varphi(-a + r\varepsilon).$$

Nehmen wir die von der unteren und oberen Grenze an gezählten gleichvielten (*ktén*) Elemente zusammen, so ist für jenes Element  $x = -a + k\varepsilon$ , für dieses  $x = +a - k\varepsilon$ ; daher erfolgt

$$J = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) dx = \lim_{m=0} \varepsilon \sum_{k=0}^{k=m} [\varphi(-a + k\varepsilon) + \varphi(a - k\varepsilon)].$$

Wenn die Function  $\varphi(x)$  insbesondere von der in (22) angedeuteten Eigenschaft, so heben sich jede zwei solche gleichstelligen Paare aus, wie gross oder klein sie auch sein mögen, ja selbst wenn sie gleichzeitig und gleichen Schrittes ins Unendliche steigen werden, vollständig auf, und folglich annullirt sich auch die ganze Summe. Das fragliche begrenzte Integral wird sonach

$$J = \int_{-a}^{+a} \varphi(x) dx = 0,$$

oder

$$(22) \quad \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$$

Nun ist aber in dem zu ermittelnden Integral  $A$

$$(23) \quad \varphi(x) = \frac{1}{x},$$

die Bedingung (22) erfüllt, mithin ist auch nach dieser Bestimmung

$$A = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{x} dx = 0.$$

Schlussfassung. Und so wäre denn streng erhärtet, dass, wenn Werth auch die Grenze  $a$  haben möge, jedes zwei

schen gleichen entgegengesetzten Grenzen genommene Integral der vorliegenden Art gleich Null, nemlich

$$(36) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

sein muss.

### §. 19.

Wenden wir dieses wichtige Ergebniss auf die Integrale (26) und (29) an, so erhalten wir

$$(37) \quad \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

d. h.: Entgegengesetzte Grenzen dieses Integrals können durch Abänderung des Vorzeichens der einen oder der anderen Grenze gleichstimmig gemacht werden.

Und danach lässt sich die Auswerthung dieses begrenzten Integrals, durch Einsatz der Grenzen in das richtige allgemeine Integral

$$(16) \quad \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2) + C$$

ohne Anstand bewerkstelligen.

Hält man sofort die Integrale (26), (27) und (37) zusammen, so findet man für alle möglichen viererlei Zeichenstellungen der Integrationsgrenzen

$$(38) \quad \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{-b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{b^2}{a^2} \right),$$

und insbesondere für  $b=0$  wieder wie früher

$$(36) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{+a}^{-a} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln 1 = 0.$$

Hieraus leuchtet ein, dass der Werth dieses begrenzten Integrals keineswegs von den algebraischen Beziehungen (der Positivität oder Negativität), sondern lediglich von den absoluten Werthen seiner Grenzen abhängt.

Demgemäss lässt sich dieses begrenzte Integral nicht allein dem von Cauchy richtig angegebenen allgemeinen Integrale sondern auch nach der von mir aufgestellten allgemeinen Rationsweise

$$(10) \quad \int \frac{dx}{x} = l(\text{val. abs. } x) + C' + iC''$$

auswerthen, indem man nach der letzteren

$$(39) \quad \int_{\pm a}^{\pm b} \frac{dx}{x} = \int_{\pm a}^{-b} \frac{dx}{x} = l \frac{b}{a},$$

, wofern  $x_0$  und  $X$  positive oder negative Zahlen vorstellen,

$$(40) \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x} = l \frac{\text{val. abs. } X}{\text{val. abs. } x_0}$$

Auf diese Weise ist demnach z. B. das in §. 4. citirte Integral

$$\int_{-2}^{+3} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x} = \int_{+2}^{-3} \frac{dx}{x} = \int_{+2}^{+3} \frac{dx}{x},$$

nach (38)

$$= \frac{1}{2} l \frac{9}{4},$$

nach (39)

$$= l \frac{3}{2}.$$

## §. 20.

Sehen wir zum Ueberflusse oder vielmehr zur Beseitigung des Zweifels noch nach, ob und wienach diese völlig richtig erhaltenen Rechnungsergebnisse auch noch mit geometrischen Betrachtungen im Einklang stehen, welcher Prüfstein insbeson-  
dere für den schärfsten gehalten wird.

Dazu lassen wir in dem bekannten allgemeinen Integralausdruck des Flächeninhaltes einer von einem ebenen Curvenbogen und den rechtwinkligen Coordinaten seiner Grenzpunkte begrenzten Figur

...  
...

...  $HHG$  (Taf.  
... möglich, für  $OP=$

$$\frac{dx}{x}$$

... beide Integrationsgrenze  
... die Fläche  $f$  von  $x=x_0=0$   
...  $+b$  und  $y=CD$  aus, wo  $a$

... so erhalten wir nach (42) ■

$$\frac{dx}{x} = + \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{b^2}{a^2} \right),$$

... — um das betreffende alge  
... Endausdrucke mit Entschiede  
... den Logarithmand jederzeit >

...  $\lambda=b=OE < OA$  ist, die Fläche

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{b^2}{a^2} \right) = - \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{a^2}{b^2} \right).$$

... zwei Flächen  $f_1$  und  $f_2$  algebraisch en  
... fixe Fläche  $JKBAJ=F$ , welche  
... steht und an der Anfangsordinate  $A$   
... endet, sind die zwei mit den nem  
...  $CD$  und  $EF$  wie die  $f_1$  und  $f_2$  endende

$$JKBAJ + ABDCA = F + f_1$$

$$JKBAJ - ABFEA = F - f_2.$$

Die zwei Flächen  $f_1$  und  $f_2$  werden also der Fläche  $F$  entgegengesetzt aggregirt, die  $f_1$  ihr addirt, die  $f_2$  aber ihr subtrahirt: mithin sind sie nicht allein geometrisch entgegengesetzt, sondern sie diesseits und jenseits der gemeinsamen Anfangsordinaten  $AB$  liegen, sondern auch algebraisch entgegengesetzt. Wählt zur Vereinfachung der Untersuchung die fixe Fläche  $F$ , wie dergestalt, dass die sich ihr anschliessende Fläche  $f_1$  sie vergrössert, und sieht man Vergrösserung als positive Beziehung an, so ist  $f_1$  positiv, folglich  $f_2$  negativ, wie es die Rechnung gab.

II. Wählen wir ferner beide Integrationsgrenzen neu, dehnen wir nemlich die Fläche  $f$  von  $x = x_0 = OA' = -a$   $y = A'B'$  bis  $x = X = OC' = -b$  und  $y = C'D'$  aus; so ist,

a) wenn  $b > a$  ist, die Fläche

$$(5) \quad A'B'D'C'A' = f' = k^2 \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = + \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{b^2}{a^2} \right).$$

eben ergibt sich, wenn

b)  $b < a$  nemlich  $X = -b = OE'$  und  $OE' < OA'$  ist, die Fläche

$$(6) \quad A'B'E'F'A' = f'' = k^2 \int_{-a}^{-b} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \\ = - \frac{1}{2} k^2 \cdot l \left( \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Dass  $f'$  und  $f''$ , als auf entgegengesetzten Seiten ihrer Anfangsordinate  $A'B'$  gelegen, ebenfalls algebraisch entgegengesetzt sind, erhellt wie früher leicht, wenn man sie der Fläche  $B'A'J' = F'$  anfügt. Dass aber  $f'$  gerade so wie  $f_1$  positiv soll, bleibt noch zu rechtfertigen. Dazu müssen sie beide in einerlei Fläche gefügt werden können, welche zum Theil von Anfangsordinaten  $AB$ ,  $A'B'$  beider Flächen begrenzt wird. solche Fläche ist die Figur

$$ABKL'J'A'B'K'LJA = \mathfrak{F}.$$

an sie wird die Fläche

$$A'B'D'C'A' = f'$$

so wie die Fläche

$$ABDCA = f_1$$

gefügt (addirt), also sind sie beide positiv. Dagegen werden Fläche  $\mathfrak{F}$  die zwei Flächen  $f''$  und  $f_2$  entzogen (subtrahirt) mithin sie zugleich negativ.

Ueberdies sind die zwei gemischtlinigen Vierecke  $f_1$  und  $f_2$  wofern  $OA=OA'=a$  und  $OC=OC'=b$  ist, wie sich leicht durch Aufeinanderlegung beweisen lässt, congruent, also auch Grösse gleich. Da sie nun auch in algebraischer Beziehung aneinander gleichen, so sind sie völlig gleich, nemlich  $f_1=f_2$ . Gleiches gilt auch von  $f_2$  und  $f''$ , wofern zugleich  $OE=OE'$  — Hiedurch ist sofort die Giltigkeit der Gleichung (25) geometrisch bestätigt.

III. Nehmen wir die untere Grenze negativ und die obere positiv, beide aber gleich, lassen wir also die Fläche  $f$  von  $x=x_0=-a=OA'$  und  $y=A'B'$  in Taf. I. Fig. 2. bis  $x=X_0=+a=OA$  und  $y=AB$  sich ausbreiten. Da wenn man sich vorstellt, dass  $Oy$  und  $O\bar{y}$  einander stets gleichend, unendlich wachsen, also auch  $yG$  und  $\bar{y}G$ , einander gleich bleibend, unendlich abnehmen, die Grenze der Fläche

$$\begin{aligned} A'B'G'\bar{y}OyGBOA' &= \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{-0} \frac{dx}{x} + \int_{+0}^{+a} \frac{dx}{x} \\ &= A'B'G'\bar{y}OA' + ABGyOA \\ &= \varphi' + \varphi_1. \end{aligned}$$

Diese zwei Flächen  $\varphi'$  und  $\varphi_1$  sind aber offenbar congruent, da sie, wenn man die eine bei festgehaltenem Punkte  $O$  um einen gestreckten Winkel herumdreht, zur völligen Deckung gebraucht werden können.

Denkt man sich nun auf ein Rechteck  $A'N'NA$ , von dem zwei parallele Seiten Verlängerungen der Ordinaten  $AB$  und  $A'B'$  sind, und die zur  $A'A$  parallele Seite  $N'N$  noch über die Fläche  $\Phi$  hinaus liegt, die Gruppe der zwei congruenten Scheitelvierecke  $\varphi'$  und  $\varphi_1$ , wie in Taf. I. Fig. 2., aufgelegt, so wird die Fläche  $A'N$  einerseits das gemischtlinige Viereck  $\varphi'$  und andererseits das gemischtlinige Viereck  $\varphi_1$  an den übrig bleibenden Fläche  $\Phi$  zugesetzt. Somit zeigt sich  $\varphi'$  subtraktiv und  $\varphi_1$  additiv, oder da in unseren Annahmen die Relation die positive Beziehung ist, die  $\varphi_1$  positiv, folglich  $\varphi'$  negativ. Weil aber auch noch  $\varphi_1$  und  $\varphi'$  congruent sind, so  $\varphi' = -\varphi_1$ , folglich  $\varphi' + \varphi_1 = 0$ .

Demnach gibt obige Flächenaggregation

$$A'N + (\varphi' + \varphi_1) = A'N + \varphi' + \varphi_1 = (A'N - \varphi_1) + \varphi_1 = \Phi + \varphi_1$$

oder auch

$$= A'N,$$

und zugleich ist



$$(47) \quad A'B'G'yOyGBAOA' = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0 = \frac{1}{2} \left| \frac{a^2}{a^2} \right| = \frac{1}{2} |1|.$$

Dadurch wird sonach die Gleichung (36) geometrisch bestätigt.

IV. Nehmen wir endlich, wie früher, die untere Grenze negativ und die obere positiv, jedoch die obere absolut betrachtet grösser als die untere, lassen wir nemlich die Fläche  $f$  von  $x=x_0=-a=OA'$  und  $y=A'B'$ , in Taf. I. Fig. 2., bis  $x=X=+b=OC > OA'$  und  $y=CD$  sich erstrecken. Da ist, mit Berücksichtigung von Nr. III. und I., die integrierte Fläche

$$\begin{aligned} (48) \quad A'B'G'yOyGDCA' &= \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} + \int_{+a}^{+b} \frac{dx}{x} \\ &= (\varphi' + \varphi_1) + f_1 = f_1 \\ &= + \frac{1}{2} \left| \left( \frac{b^2}{a^2} \right) \right|. \end{aligned}$$

In der That, wenn man auf das Rechteck  $AN'$  die zwei verbundenen gemischtlinigen nicht congruenten Scheitelveierecke  $\varphi'$  und  $OyGDCO = \varphi_1 + f_1$  auflegt, so erscheint wieder  $\varphi'$  subtractiv oder negativ, und  $\varphi_1 + f_1$  additiv oder positiv, also  $\varphi' = -\varphi_1$ ; folglich ist dieses Flächenaggregat

$$A'N + (\varphi' + \varphi_1 + f_1) = A'N + (-\varphi_1 + \varphi_1) + f_1 = A'N + f_1.$$

Und dadurch ist denn auch die Gleichung (29) oder (37) geometrisch bestätigt.

## §. 21.

Nachdem wir nunmehr sowohl analytisch als geometrisch aufs Strengste erwiesen haben, dass für jedwede absolute Zahl  $a$

$$(36) \quad \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x} = 0$$

und für die wie immer algebraisch beziehlichen Grenzzahlen  $a$  und  $b$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \left| \frac{b^2}{a^2} \right|$$

ist; müssen wir noch prüfen, ob mit diesen festgestellten

Thatsachen die von Cauchy, zuerst in seinem bereits mals erwähnten *Résumé*, 24. leçon, gelehrte Bestimmung Werthe solcher begrenzter Integrale, die in ihrem Gren Intervall unbestimmt werden, in Einklang stehe. Auf Seite Zeile 7 — 18 argumentirt er wie folgt:

„Nach der bekannten Zertheilung des Intervalls der Integrationsgrenzen findet man

$$9) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty,$$

mithin erscheint dieses Integral unbestimmt. Um sich zu versichern, was dasselbe eigentlich sei, genügt es zu beachten, wenn man mit  $\varepsilon$  eine unendlich kleine Zahl und durch  $\mu$ ,  $\nu$  willkürliche positive Constanten bezeichnet, gewissen früher bewiesenen Formeln 6) S. 94. gemäss, sich ergibt:

$$10) \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\nu\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}.$$

Mithin wird die Formel (9) werden

$$(11) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right\} \\ = \lim \left[ l(\mu\varepsilon) + l\left(\frac{1}{\nu\varepsilon}\right) \right] = l \frac{\mu}{\nu},$$

und für das fragliche Integral einen völlig unbestimmten Werth darbieten, weil dieser der Neper'sche Logarithme der willkürlichen Constante  $\frac{\mu}{\nu}$  sein wird.“

Zum Schluss nennt er auf S. 96., Z. 18 — 22. den für  $\mu$  sich ergebenden Werth eines solchen Integrals den Hauptwerth (valeur principale) desselben, der im vorliegenden Falle Null wird.

Diese Lehre haben auch Duhamel, Moigno und Serret in ihre Lehrbücher der Integralrechnung aufgenommen.

Gegen solchen Vorgang Cauchy's müssen wir jedoch Folgendes bemerken.

1. In seinen Gleichungen 10) sind die angeblichen Grenzen die wirklichen, d. i. bestimmte fixe endliche Grenzen, sondern nur zur Abkürzung der Rede so genannte (!) unendliche Grenzen; weil ja der Unterschied zwischen derlei unbestimmten, nicht fixirten, Grössen und der gegen sie hinstrebenden veränderlichen keinesfalls kleiner als jede beliebige noch so klein genommene Grösse zu werden vermag. Für solche Quasigrenzen sind jedoch seine Gleichungen 6) nicht erwiesen. Darum sind die Gleichungen 10) auch nichts Anderes als die Gleichung 9), nemlich: dass die dortigen Integrale bezugsweise  $-\infty$  und  $+\infty$  sind, folglich ihre Summe unbestimmbar sei.

Bei der Zerfällung des Grenzen-Intervalls, von  $-1$  bis  $+1$ , in die beiden engeren Intervalle, von  $-1$  bis  $-\mu\varepsilon$  und von  $+\nu\varepsilon$  bis  $+1$ , wurde das Zwischen-Intervall von  $-\mu\varepsilon$  bis  $+\nu\varepsilon$  ausgespart, da eigentlich wie folgt zerfällt werden sollte:

$$(40) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\nu\varepsilon}^{+1} \frac{dx}{x},$$

um nur so alle Grenzen genau an einander sich anschliessen. Cauchy nahm daher stillschweigend an, dass das von ihm ausgesparte Mittel-Integral bei unendlicher Abnahme von  $\varepsilon$  der Null zustrebe, weil auch seine beiden Integrationsgrenzen  $-\mu\varepsilon$  und  $+\nu\varepsilon$  gegen die Null, als ihrer unerreichbaren Grenze, mit einander zugleich unaufhörlich convergiren. Er nahm nemlich

$$(50) \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{-\mu\varepsilon}^{+\nu\varepsilon} \frac{dx}{x} = \int_0^0 \frac{dx}{x} = 0$$

oder auch

$$= \int_{-0}^{+0} \frac{dx}{x} = 0.$$

Allein bei dieser Grenzwert-Bestimmung ward übersehen, dass die Integrationsgrenzen  $-\mu\varepsilon$ ,  $+\nu\varepsilon$  nicht gleichen Schritt ihrer gemeinsamen Grenze Null zueilen, was unerlässlich ist. Darf man ja bekanntlich auch nicht sich erlauben, etwa

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\sin \mu\varepsilon}{\nu\varepsilon} = \frac{\sin 0}{0} = 1$$

oder

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{e^{\mu\varepsilon} - 1}{\nu\varepsilon} = \frac{e^0 - 1}{0} = 1$$

gleich zu setzen, so lange  $\mu\varepsilon$  und  $\nu\varepsilon$  also auch  $\mu$  und  $\nu$  von einander verschieden sind, wohl aber, wenn sie unter sich völlig gleich sind.

Fordert aber Cauchy's Annahme (50) unbedingt, dass  $\mu = \nu$  sei, so verwandelt sich seine Gleichung 11) nothwendig in

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = 11 = 0;$$

mithin besitzt dieses Integral keineswegs einen unbestimmten, auch keinen Hauptwerth, sondern lediglich einen einzi-  
völlig bestimmten Werth, und dieser ist Null, wie er auch  
uns nach der 2ten Bestimmungsweise in §. 18. gefunden wu

Suchen wir zur vollkommenen Vergewisserung noch den  
tigen Werth des aus 11) weggelassenen Mittel-Integrals

$$\int_{-\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x}$$

bei der Annahme, dass  $\mu$  und  $\nu$  ungleich seien. Da finden  
zufolge der Gleichungen (28), (29) und (36) dann nach §. 5.:

1) wenn  $\mu < \nu$ , also  $\mu\epsilon < \nu\epsilon$  ist,

$$\int_{-\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} = \int_{-\mu\epsilon}^{+\mu\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} = 0 + 1 \frac{\nu\epsilon}{\mu\epsilon} = 1 \frac{\nu}{\mu};$$

2) wenn  $\mu > \nu$ , also  $\mu\epsilon > \nu\epsilon$  und  $-\mu\epsilon < -\nu\epsilon$  ist,

$$\int_{-\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} = \int_{-\mu\epsilon}^{-\nu\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{-\nu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} = 1 \frac{-\nu\epsilon}{-\mu\epsilon} + 0 = 1 \frac{\nu}{\mu}.$$

Und wirklich, wenn man in Cauchy's Gleichung 11) das  
gelnde Mittel-Integral an seine richtige Stelle einschiebt, z  
sich dieser Werth als die erforderliche Ergänzung. Denn so  
det man

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} &= \lim_{\epsilon=0} \left\{ \int_{-1}^{-\mu\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{-\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\nu\epsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon=0} \left\{ \int_{-1}^{-\mu\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\nu\epsilon}^{+1} \frac{dx}{x} \right\} + \lim_{\epsilon=0} \int_{-\mu\epsilon}^{+\nu\epsilon} \frac{dx}{x} \\ &= 1 \frac{\mu}{\nu} + 1 \frac{\nu}{\mu} = 1 \frac{\mu\nu}{\nu\mu} = 11 = 0, \end{aligned}$$

welcher Werth allein mit allen unseren früheren Ergebnis  
übereinstimmt.

Mit Rücksicht auf die, in §. 18. 4te Bestimmungsweise  
gestellten Lehren ist nun leicht wahrnehmbar, dass ähnlich  
überhaupt in allen jenen begrenzten Integralen von der Form

$$\int_{-a}^{+b} \varphi(x) dx,$$

deren Differential-Coefficient  $\varphi(x)$  mit seiner Veränderlichen  $x$

gleich sein Vorzeichen ändert und für  $x=0$  unstetig wird, Cauchy's Lehre von den sogenannten Hauptwerthen solcher unbestimmt werdender begrenzter Integrale eine strenge Prüfung nicht bestehe.

### Bemerkung des Herausgebers.

Da die vorhergehende Abhandlung hauptsächlich gegen eine von Cauchy, Schlömilch und mir vertheidigte Ansicht gerichtet ist, so glaube ich, ohne mich hier irgend in Weitläufigkeiten einzulassen zu wollen, doch Folgendes bemerken zu müssen, und zwar um so mehr, weil die in Rede stehende Ansicht wohl bei den den Mathematikern Eingang und Annahme gefunden hat, welche sich, so zu sagen, der Schule in der Analysis angeschlossen haben, die noch neuerlich erst von einigen verdienten Mathematikern mit dem Namen der neueren kritischen Schule beehrt worden ist; bevorworte aber ausdrücklich, dass ich durch die folgenden, absichtlich möglichst allgemein gehaltenen, ganz kurzen Bemerkungen dem geehrten Herrn Verfasser der obigen Abhandlung keineswegs etwa Behauptungen unterschieben will, die derselbe vielleicht gar nicht gemacht hat oder hat machen wollen. Ich glaube nämlich, dass es weder Cauchy noch irgend einem Anderen eingefallen ist, geradezu zu behaupten oder auch nur stillschweigend anzunehmen, dass es geradezu unmög-

lich sei,  $\int \frac{\partial x}{x}$  unter einen ganz allgemeinen Ausdruck zu bringen.

So lange aber Cauchy das Reelle und Imaginäre in der Analysis streng von einander sondert und aus einander hält, was nach meiner Ansicht gerade mit einem Hauptpunkt in seiner gesamten so höchst ausgezeichneten Darstellung und Begründung der Analysis, der an wirklicher mathematischer Strenge bis jetzt etwas Anderes nicht gleich kommt, ausmacht; so lange also auch nur von Differentialquotienten im eigentlichen Sinne von reellen Functionen gesprochen, und das Imaginäre mehr nur symbolisch aufgefasst wird, was also natürlich auch umgekehrt in die Integralrechnung zu übertragen ist: so lange wird er berechtigt sein, die Schreibart

$$\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l. x^2,$$

welche das Integral eben nur als reell auffasst, für die allein richtige anzusehen. Auch in meinen Schriften über Differential- und Integralrechnung fasse ich ursprünglich durchaus nur das Reelle in's Auge, und weiss in der That auch heute noch nicht, wie ich den Begriff der Gränze als solcher im eigentlichen Sinne auf das Imaginäre ohne Weiteres übertragen soll, eben so wenig wie dies Cauchy wissen wird. Die obige Abhandlung habe ich, um auch entgegengesetzten Ansichten Gelegenheit zu geben, sich geltend zu machen, gern im Archiv abdrucken lassen, bin aber durch dieselbe in meiner Grundansicht von der Sache nicht im Geringsten wankend gemacht worden, so wie ich auch durch die bei vielen analytischen Entwicklungen gemachte Erfahrung längst von der Vortrefflichkeit der obigen, vor allen Fehlgriffen in der kürzesten und einfachsten Weise sicher stellenden

Schreibart überzeugt worden bin. Dass bei allen Anwendungen der Differential- und Integralrechnung Unterbrechungen der Stetigkeit überall vollständig vermieden, und die Fälle, wo sie sich finden, jederzeit besonders discutirt werden müssen, ist eine Sache, die sich jetzt so sehr von selbst versteht, dass sie besonders gar nicht mehr bemerkt zu werden braucht, und deshalb auch immer stillschweigend als selbstverständlich angenommen wird. Im Grunde aber scheint mir der geehrte Herr Verfasser der obigen Abhandlung, wenn ich denselben, was ich ausdrücklich bevorworte, überall richtig verstanden habe, nicht einmal so sehr wesentlich von Cauchy abzuweichen, wobei ich es übrigens jetzt ganz dahin gestellt sein lassen will, ob von demselben ganz gewürdigt worden ist, dass der genannte, namentlich durch höchste Strenge und Evidenz bis jetzt unübertroffene Mathematiker, wie schon vorher bemerkt wurde, überall das Reelle und Imaginäre mit der grössten Strenge und scrupulösesten Genauigkeit auseinander hält. Weitläufiger hierüber zu sein, ist jetzt nicht meine Absicht. Mögen die Leser sich ihr Urtheil selbst bilden. Ich habe hier ein Urtheil über die obige Abhandlung, die ich ganz absichtlich aufgenommen habe, nicht aussprechen wollen und in meiner Eigenschaft als Herausgeber auch füglich nicht aussprechen können; aber so viel glaube ich nochmals wiederholen zu dürfen, dass ich in meiner Grundansicht über die Sache durch diese Abhandlung nicht im Geringsten wankend gemacht worden bin, und mich der nach meiner Ansicht nach wie vorher sehr vorzüglichen Cauchy'schen Schreibart, die in grösster Einfachheit und Eleganz vor allen Fehlgriffen sicher stellt, fortwährend bedienen werde.

Der wissenschaftliche Stand der Sache lässt sich in der einfachsten, kürzesten und bündigsten Weise so aussprechen:

So lange man in der *Differentialrechnung* nur beweisen und beweisen kann, dass, den Differentialquotienten als wirkliche Gränze im eigentlichen Sinne aufgefasst, was nur bei reellen Grössen möglich ist, nur für positive  $x$  und wenn  $\lg x$  den reellen Werth dieses Logarithmus bezeichnet,

$$\frac{\partial \lg x}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

ist, so lange kann und darf man auch umgekehrt in der *Integralrechnung* nur

$$\int \frac{\partial x}{x} = \lg(\pm x),$$

das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem  $x$  positiv oder negativ ist, oder kürzer und eleganter

$$\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} \lg x^2$$

setzen.

Und so lange diese Auffassung richtig ist, hat auch der Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes das, was ich namentlich in dem Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. S. 158 gesagt habe, nicht widerlegt.

G.

## II.

# Bemerkungen zur Convergenz der unendlichen Reihen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

1. In den folgenden Blättern beabsichtige ich einige Untersuchungen über die Grenzen der Summen convergenter Reihen zu veröffentlichen. Sie sind hervorgerufen durch das Studium eines Satzes von Cauchy, der so lautet (Cours d'Analyse p. 131.):

„Lorsque les différens termes d'une série sont des fonctions d'une même variable  $x$ , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de  $x$ .“

Die Analysten haben von diesem Satze vielfachen Gebrauch gemacht, namentlich um die Entwicklung der Logarithmen und Kreisfunctionen in unendliche Reihen mit Hülfe der Binomialreihe zu bewerkstelligen, und selbst im Eingange der Differentialrechnung spielt die Anwendung des obigen Satzes eine Rolle, indem man sich nur an die Entwicklung des Differentials der Exponentialgrösse, sowie man selbige in Herrn Cauchy's Schriften liest, zu erinnern braucht.

Ich glaube den grossen Verdiensten Cauchy's um die Wissenschaft nicht zu nahe zu treten, wenn ich den angeregten Satz für unrichtig erkläre, und es dürften die folgenden Betrachtungen

geeignet sein, zu zeigen, wie ausserordentlich vorsichtig man mit den unendlichen Reihen, selbst im Falle ihrer Convergenz, umgehen muss.

Die Richtigkeit meiner Behauptung zeigt sich zunächst an mehreren Beispielen. So ist die Function

$$x^{2m}(1-x) + x^{2m+2}(1-x) + x^{2m+4}(1-x) + \text{etc.},$$

welche bekanntlich für jedes  $x$ , dessen numerischer Werth kleiner als 1 ist, die Summe  $\frac{x^{2m}}{1+x}$  hat, unstetig für  $x=1$ , da sie diesen Werth verschwindet, während  $\frac{x^{2m}}{1+x}$  gegen die Grenze convergirt, wenn  $x$  sich der Einheit nähert.

Ein anderes Beispiel bietet die folgende Reihe:

$$\frac{1}{2}\varphi = \sin \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \text{etc.},$$

welche bekanntlich für alle Werthe von  $\varphi$  zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$  convergent ist. Diese Function ist unstetig für  $\varphi=-\pi$  und  $\varphi=+\pi$ , denn sie verschwindet für  $\varphi=\mp\pi$ , während sie für  $\varphi=\mp(\pi-\alpha)$ , wo  $\alpha$  positiv und kleiner als 1, den Werth  $\mp\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)$  erlangt.

Mit anderen Worten: es ist unrichtig, wenn man, um die Grenze der Summe einer convergenten Reihe zu bestimmen, in jedem einzelnen Gliede zur Grenze übergeht und das Aggregat dieser Grenzen nimmt. Und diese Bemerkung bezieht sich nicht etwa bloß auf einzelne Ausnahmen von einer allgemeinen Regel, sondern es wird aus den nachfolgenden Betrachtungen zur Genüge erhellen, dass die beiden Grössen

$$\text{Lim} [\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \dots] \text{ und } \text{Lim} \varphi_1(x) + \text{Lim} \varphi_2(x) + \dots$$

nur in besonderen Fällen dieselben Werthe haben, wenn beide Reihen ins Unendliche fortgehen.

Man darf z. B., wie in vielen neueren Schriften zu lesen, aus der Gleichung

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1+x + \frac{1}{2}\alpha x^2(1-\alpha) + \frac{1}{6}\alpha^2 x^3(1-\alpha)(1-2\alpha) + \text{etc.},$$

wo die Convergenz von  $x=-\frac{1}{\alpha}$  bis  $x=+\frac{1}{\alpha}$  stattfindet, nicht ohne eine anderweitige Untersuchung die folgende Gleichung herleiten:



$$\text{Lim} [(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}] = 1+x+\frac{1}{2}\alpha x^2+\frac{1}{6}\alpha^2 x^3+\text{etc.},$$

wo das Zeichen Lim. bedeutet, dass  $\alpha$  gegen Null convergiren, soll.

Ebenso ist die Differentiation einer unendlichen convergenten Reihe, auch wenn die resultirende Reihe noch convergirt, im Allgemeinen nicht zulässig.

Es sei z. B.

$$F(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots$$

für einen bestimmten Werth  $\gamma$  von  $x$  und für die Nachbarwerthe von  $\gamma$ , also

$$F(\gamma) = \varphi(\gamma) + \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\gamma) + \dots,$$

$$F(\gamma+i) = \varphi(\gamma+i) + \varphi_1(\gamma+i) + \varphi_2(\gamma+i) + \dots;$$

wo  $i$  eine endliche Grösse bedeutet, so beschaffen, dass obige Reihe von  $x=\gamma$  bis  $x=\gamma+i$  fortwährend convergent bleibt. Da die Subtraction zweier convergenter Reihen wieder zu einer convergenten Reihe führt, so kommt

$$\frac{F(\gamma+i) - F(\gamma)}{i} = \frac{\varphi(\gamma+i) - \varphi(\gamma)}{i} + \frac{\varphi_1(\gamma+i) - \varphi_1(\gamma)}{i} + \text{etc.}$$

Lässt man nun  $i$  sich der Null nähern, so gehen die Glieder in ihre Ableitungen über, es folgt aber nicht

$$F'(\gamma) = \varphi'(\gamma) + \varphi'_1(\gamma) + \varphi'_2(\gamma) + \text{etc.},$$

wenn immerhin die Reihe rechter Hand convergent ist.

2. Um in ein näheres Detail unseres Gegenstandes einzutreten, sei

$$u^0_x, u^{(1)}_x, u^{(2)}_x, u^{(3)}_x \text{ etc.}$$

eine von  $x=\beta-i$  bis  $x=\beta$  convergente Reihe, und alle ihre Glieder für die in Betracht kommenden Werthe von  $x$  stetige Functionen dieser Variabeln. Setzt man

$$f(\beta-i) = u^0_{\beta-i} + u^{(1)}_{\beta-i} + u^{(2)}_{\beta-i} + \text{etc.},$$

so fragt sich, welchen Werth Lim.  $f(\beta-i)$  hat, indem  $i$  sich der Null nähert. Bezeichnen wir die Grenze von  $u^{(p)}_x$ , indem  $x$  gegen  $\beta$  convergirt, mit  $u^{(p)}_\beta$ , setzen

$$s = u^0_\beta + u^{(1)}_\beta + u^{(2)}_\beta + \text{etc.},$$

und betrachten die Differenz

$$s - f(\beta - i) = (u^0_\beta - u^0_{\beta-i}) + (u^{(1)}_\beta - u^{(1)}_{\beta-i}) + (u^{(2)}_\beta - u^{(2)}_{\beta-i}) + \text{etc.};$$

die Glieder dieser unendlichen Reihe werden sich mit  $i$  zugleich der Null nähern, aber es braucht deswegen  $\lim [s - f(\beta - i)]$  nicht  $= 0$  zu sein, kann vielmehr einen sehr beträchtlichen Werth haben. Hiernach haben wir uns mit folgender Frage zu beschäftigen:

„Es sei  $\varphi(x) = v^0_x + v^{(1)}_x + v^{(2)}_x + \text{etc.}$  eine unendliche Reihe, convergent von  $x = \beta - i$  bis  $x = \beta$ , wo  $i$  eine endliche Grösse bedeutet, die sehr klein sein kann; es nähern sich ferner alle Glieder der Null, wenn  $x$  gegen die Grenze  $\beta$  geht. Unter welchen Bedingungen ist  $\varphi(x)$  gleichzeitig mit  $\beta - x$  unendlich klein?“

Eine allgemeine Lösung dieser Aufgabe dürfte schwerlich erreicht werden können. Ich werde indessen einige Theoreme über diesen Gegenstand entwickeln, welche bei vielen analytischen Untersuchungen einigen Nutzen gewähren dürften.

**3. Erstes Theorem.** „Es sei  $v^0_x, v^{(1)}_x, v^{(2)}_x, \text{etc.}$  eine unendliche Reihe, deren Glieder für den Werth  $\beta$  von  $x$  und für die Nachbarwerthe von  $\beta$  (nach einer Seite hin ist nur nöthig) stetige Functionen von  $x$  sind, und sich der Null nähern, wenn  $x$  gegen die Grenze  $\beta$  geht; auch sei die Reihe für die bezeichneten Werthe von  $x$  immer convergent. Bezeichnet man nun den absoluten Werth

$$\text{von } v^{(n)}_x + v^{(n+1)}_x + v^{(n+2)}_x + \text{etc. mit } R^{(n)}_x,$$

so wird die Summe der obigen Reihe mit  $\beta - x$  unendlich klein, wenn sich ein Werth  $\xi$  von  $x$  angeben lässt, so dass der Werth  $R^{(n)}_\xi$  nicht kleiner ist als alle diejenigen Werthe der Function  $R^{(n)}_x$ , welche sie von  $x = \xi$  bis  $x = \beta$  erlangt, und zwar unabhängig von den besonderen Werthen der Zahl  $n$ , wenigstens nachdem diese eine bestimmte Grenze überstiegen hat.“

**Beweis.** Es bedeute noch  $s^{(n)}_x$  den numerischen Werth von  $v^0_x + v^{(1)}_x + \dots + v^{(n-1)}_x$ , so dass nun

$$\varphi(x) = \pm s^{(n)}_x \pm R^{(n)}_x$$

ist, wo die Vorzeichen beliebig sein können.

Da die Reihe für  $x = \xi$  convergent vorausgesetzt ist, so kann man einen so grossen Werth  $n'$  von  $n$  angeben, dass  $R^{(n')}_\xi < \frac{1}{2}\varepsilon$  wird, wo  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet; zugleich darf man annehmen, dass der Rest  $R^{(n)}_x$  die im Lehrsatz ausgesprochene Eigenschaft von  $n = n'$  bis  $n = \infty$  habe. Wenn nun die Summe  $s^{(n')}_\xi$  ebenfalls schon  $< \frac{1}{2}\varepsilon$  ist, so folgt  $s^{(n')}_\xi + R^{(n')}_\xi < \varepsilon$ . Wenn aber jene Bedingung nicht stattfindet, so kann man einen

Werth  $\xi'$  zwischen  $\xi$  und  $\beta$  angeben, so dass  $s^{(n')}\xi'$  wirklich  $< \frac{1}{2}\varepsilon$  wird, indem die Summe  $s^{(n')}_x$  aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, welche mit  $\beta - x$  unendlich klein werden; nun ist vermöge der Annahme  $R^{(n')}\xi' \stackrel{=}{<} R^{(n')}\xi$ , folglich ist auch  $R^{(n')}\xi' < \frac{1}{2}\varepsilon$ , also wie vorhin  $s^{(n')}\xi' + R^{(n')}\xi' < \varepsilon$ . — Hieraus folgt weiter, dass der absolute Werth von  $\varphi(x)$  für die vorhergehenden Werthe von  $x$  und  $n$  ebenfalls  $< \varepsilon$  ist, und da diese Schlüsse gelten, wie klein  $\varepsilon$  gedacht werden möge, so folgt, dass  $\varphi(x)$  sich der Null nähert, indem  $x$  gegen seine Grenze  $\beta$  geht.

**4. Zweites Theorem.** „Es sei  $v^0_x, v^{(1)}_x, v^{(2)}_x$  etc. eine unendliche Reihe, deren Glieder für den Werth  $\beta$  von  $x$  und für die Nachbarwerthe von  $\beta$  stetige Functionen von  $x$  sind, und sich der Null nähern, wenn  $x$  gegen die Grenze  $\beta$  geht; alle Glieder seien ferner positiv von einem bestimmten Gliede an, und die Reihe immer convergent, für die bezeichneten Werthe von  $x$ . Wenn es nun einen Werth  $\xi$  von  $x$  giebt, so dass  $v^{(n)}\xi$  nicht kleiner ist als alle diejenigen Werthe, welche  $v^{(n)}_x$  von  $x=\xi$  bis  $x=\beta$  erlangt, und zwar unabhängig von den besonderen Werthen der Zahl  $n$ , wenigstens nachdem diese eine bestimmte Grenze überschritten hat, so wird die Summe der obigen Reihe gegen Null convergiren, wenn  $x$  sich der Grenze  $\beta$  nähert.“

Der Beweis dieses Theorems reducirt sich auf das Vorhergehende.

Man denke sich nämlich einen Werth  $n'$  von  $n$ , so dass nicht nur  $v^{(n')}\xi$  die im Satze ausgesprochene Eigenschaft hat, sondern auch  $v^{(p)}\xi$  fortwährend positiv bleibt für  $p \stackrel{=}{>} n'$  und für jedes  $x$  zwischen  $\xi$  und  $\beta$ . Es ist dann, indem  $\xi'$  einen beliebigen Werth zwischen  $\xi$  und  $\beta$  bedeutet,

$$v^{(n')}\xi \stackrel{=}{>} v^{(n')}\xi', \quad v^{(n'+1)}\xi \stackrel{=}{>} v^{(n'+1)}\xi', \quad v^{(n'+2)}\xi \stackrel{=}{>} v^{(n'+2)}\xi', \text{ etc.,}$$

$$v^{(n')}\xi + v^{(n'+1)}\xi + v^{(n'+2)}\xi + \text{etc.} \stackrel{=}{>} v^{(n')}\xi' + v^{(n'+1)}\xi' + v^{(n'+2)}\xi' + \text{etc.,}$$

$$\text{d. i. } R^{(n')}\xi \stackrel{=}{>} R^{(n')}\xi',$$

woraus die Richtigkeit unseres Satzes nach dem ersten Theorem erhellt.

**5.** Untersucht man die Reihe  $1-x, x(1-x), x^2(1-x)$  etc., so wird man finden, dass die Bedingungen des zweiten Theorems nicht sämmtlich erfüllt sind. In der That ist die Summe dieser Reihe unstetig für  $x=1$ .

Man hat hier  $v^{(n)}_x = x^n(1-x) = \psi(x)$ , also die Ableitung  $\psi'(x) = (n+1)x^n - 1$ . Da diese positiv für  $x < \frac{n}{n+1}$ , negativ für  $x > \frac{n}{n+1}$ , so folgt bekanntlich, dass die Function  $\psi(x)$  bis  $x = \frac{n}{n+1}$  fortwährend wächst, von  $x = \frac{n}{n+1}$  bis  $x = 1$  fortwährend abnimmt. Wie nahe nun auch der bestimmte Werth  $\xi$  der Einheit kommen mag, man kann  $n$  gross genug nehmen, dass  $\psi(x)$  wächst, d. h. es lässt sich kein Werth  $\xi$  von  $x$  angeben, so dass  $v^{(n)}_\xi$  alle Werthe von  $v^{(n)}_x$  von  $x = \xi$  bis  $x = 1$  übertriffe, unabhängig von  $n$ . Also findet das Theorem hier keine Anwendung.

## 6. Betrachten wir ferner die unendliche Reihe

$$a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, \text{ etc.},$$

und nehmen zuerst an, dass alle Coefficienten, sowie auch  $x$ , positiv seien. Ist diese Reihe convergent von  $x = \gamma$  bis  $x = \gamma + i$ , wo  $\gamma, i$  positiv sind, so folgt

$$f(\gamma) = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + \text{ etc.}$$

$$f(\gamma + i) = a_0 + a_1(\gamma + i) + a_2(\gamma + i)^2 + \text{ etc.}$$

$$f(\gamma + i) - f(\gamma) = a_1i + a_2[(\gamma + i)^2 - \gamma^2] + \text{ etc.}$$

Da  $a_n[(\gamma + i)^n - \gamma^n]$  fortwährend positiv bleibt und stets abnimmt, indem  $i$  sich der Null nähert, für jedes  $n$ , so wird nach dem zweiten Theorem  $f(\gamma + i) - f(\gamma)$  mit  $i$  unendlich klein, d. h.  $f(x)$  ist stetig für  $x = \gamma$ .

Sind die Coefficienten nicht alle positiv, so seien  $A_0, A_1, A_2, \text{ etc.}$  ihre absoluten Werthe. Wenn alsdann die Reihe

$$A_0, A_1x, A_2x^2, \text{ etc.}$$

von  $x = \gamma$  bis  $x = \gamma + i$  convergirt, wo  $\gamma, i$  positiv sein sollen, so folgt wie vorhin, dass  $A_1i + A_2[(\gamma + i)^2 - \gamma^2] + \text{ etc.}$  mit  $i$  unendlich klein wird, folglich wird  $a_1i + a_2[(\gamma + i)^2 - \gamma^2] + \text{ etc.}$  ebenfalls unendlich klein mit  $i$ .

Unter den nämlichen Voraussetzungen wird  $f(\gamma) - f(\gamma - i)$ , wo  $i$  positiv, sich mit  $i$  gleichzeitig der Null nähern.

Der Fall, wo negative Werthe von  $x$  in Betracht kommen, lässt sich auf den vorhergehenden zurückführen. Denn macht man  $x = -y$ , so verwandelt sich die gegebene Reihe in  $a_0, -a_1y, a_2y^2, -a_3y^3, \text{ etc.}$ , wo nunmehr  $y$  eine positive Grösse ist. Man ist somit zu folgendem Satze gelangt:

**Drittes Theorem.** „Wenn die unendliche Reihe  $a_0, a_1x, a_2x^2, \text{ etc.}$  von  $x = \beta \pm i$  bis  $x = \beta$  convergent bleibt,

nachdem alle Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt worden (in welchem Falle die Reihe bekanntlich selbst convergirt), so ist ihre Summe in diesem Intervall überall eine stetige Function von  $x$ .“

7. Die Schlüsse des vorigen Paragraphen sind immer zuzugang, wenn die Reihe

$$a_1 i, a_2[(\gamma+i)^2-\gamma^2], a_3[(\gamma+i)^3-\gamma^3], \text{ etc.}$$

convergent bleibt, wenn an Stelle der einzelnen Glieder ihre numerischen Werthe gesetzt werden. Findet diese Bedingung nicht statt, was sich namentlich an den Grenzen des Intervalls von  $x$  häufig ereignet, so scheint mir die Behauptung, dass  $a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}$  für  $x=\gamma$  stetig ist, im Allgemeinen nicht zuzugang zu sein. — In der Regel genügen aber die nach Potenzen von  $x$  fortschreitenden Reihen den Bedingungen des dritten Theorems u. a. immer, wenn das Verhältniss  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  bei unendlich werdendem  $n$  gegen eine bestimmte Grenze  $L$  geht, da alsdann die Convergenz der Reihe der absoluten Werthe von  $x=-\frac{1}{L}$  bis  $+\frac{1}{L}$  stattfindet, wenn auch nicht immer für die Grenzen selbst.

Im Fall der Art, wo man zu besonderen Betrachtungen seine Zuflucht nehmen muss, ist folgender:

Angenommen, es sei schon erwiesen, dass

$$1(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \text{etc.}$$

Für jedes  $x < 1$ , man wisse aber noch nicht, dass diese Gleichung für  $x=1$  gelte. Alsdann setze man

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

Betrachte die Differenz

$$s - 1(1+x) = 1 - x - \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1}{3}(1-x^3) - \text{etc.}$$

Diese Reihe kann aber das zweite Theorem nicht angewandt werden, da die Glieder eine divergente Reihe geben, wenn man auf ihre absoluten Werthe reducirt. Wir haben daher einen andern Weg einzuschlagen.

Es sei  $s^{(n)}_x$  der absolute Werth von der Summe der  $n-1$  ersten Glieder,  $R^{(n)}_x$  der absolute Werth des Restes der Reihe, also

$$\pm R^{(n)}_x = \mp \frac{1-x^n}{n} \pm \frac{1-x^{n+1}}{n+1} \mp \frac{1-x^{n+2}}{n+2} \pm \text{etc.}$$

$$s - l(1+x) = \pm s^{(n)}_x \pm R^{(n)}_x.$$

Zunächst lässt sich zeigen, dass  $\frac{1}{n}(1-x^n)$  fortwährend abnimmt, indem  $n$  wächst, wenn dieses nur erst eine gewisse Grenze überschritten hat. Die Grösse  $nx^n$  nähert sich bekanntlich der Null als Grenze mit unendlich werdendem  $n$  ( $x$  ist nämlich ein echter Bruch); es muss sich mithin ein Werth  $n'$  von  $n$  angeben lassen, so dass  $nx^n$  von  $n=n'$  bis  $n=\infty$  stets kleiner als die Einheit bleibt, alsdann ist um so mehr  $nx^n < 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$ , woraus leicht folgt  $\frac{n+1}{n} > \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}$  d. i.  $> \frac{1-x^{n+1}}{1-x^n}$ , oder  $\frac{1-x^n}{n} > \frac{1-x^{n+1}}{n+1}$ . — Die Glieder von  $R^{(n)}_x$  werden demnach, nachdem  $n$  den Werth  $n'$  erreicht hat, fortwährend kleiner, woraus sich leicht ergibt

$$R^{(n)}_x < \frac{1-x^n}{n}$$

für ein bestimmtes  $x$  und von  $n=n'$  bis  $n=\infty$ .

Der angenommene Werth von  $x$  heisse  $\xi$ ;  $\varepsilon$  bedeute eine beliebig kleine positive Grösse. Man nehme einen Werth  $\nu$  von  $n$  zwischen  $n'$  und  $\infty$ , so dass  $\frac{1-\xi^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$  wird, was immer möglich, alsdann wird auch  $R^{(\nu)}_\xi < \frac{1}{2}\varepsilon$  sein. Ist nun  $s^{(\nu)}_\xi$  nicht  $< \frac{1}{2}\varepsilon$ , so lasse man  $\xi$  so lange zunehmen, bis diese Summe wirklich kleiner als  $\frac{1}{2}\varepsilon$  wird, so dass z. B.  $s^{(\nu)}_{\xi'} < \frac{1}{2}\varepsilon$ , wo  $\xi'$  zwischen  $\xi$  und  $s$  liegen soll. Da nun offenbar  $\frac{1-\xi'^\nu}{\nu} < \frac{1-\xi^\nu}{\nu}$  ist, und  $\frac{1-\xi^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$  war, so wird um so mehr  $\frac{1-\xi'^\nu}{\nu} < \frac{1}{2}\varepsilon$ , folglich auch  $R^{(\nu)}_{\xi'} < \frac{1}{2}\varepsilon$ ,  $s^{(\nu)}_{\xi'} + R^{(\nu)}_{\xi'} < \varepsilon$ , mithin  $s - l(1+x)$  absolut  $< \varepsilon$ , und da  $\varepsilon$  beliebig klein sein kann, so folgt  $\text{Lim. } l(1+x) = s$ , oder

$$12 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

8. Endlich will ich nach den vorhergehenden Principien eine Methode verbessern, deren sich ältere Mathematiker, nach dem Vorgange Eulers, bedient haben, um die unendlichen Reihen für den Sinus und Cosinus eines Bogens zu finden. (Introd. in Analysis inf. P. I. Cap. VIII. p. 98.)

Diese Methode knüpft an die beiden bekannten Reihen an:

$$\cos nx = (1 - n_2 \operatorname{tg}^2 x + n_4 \operatorname{tg}^4 x - \text{etc.}) \cos^n x,$$

$$\sin nx = (n_1 \operatorname{tg} x - n_3 \operatorname{tg}^3 x + n_5 \operatorname{tg}^5 x - \text{etc.}) \cos^n x;$$

$n_1, n_2, n_3$ , etc. Binomialcoefficienten bedeuten. Diese Reihen, wenn  $n$  keine positive ganze Zahl ist, ins Unendliche fortgesetzt, convergiren für jedes  $x$ , dessen absoluter Werth kleiner als  $\frac{\pi}{2}$  ist.

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen  $-m$  statt  $n$ , wo  $m$  positiv sein soll,  $y = mx$  und  $\frac{1}{m} = \varrho$ , so kommt

$$\cos \frac{1}{\varrho} y = 1 - \frac{1+\varrho}{1.2} \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^2 + \frac{(1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho)}{1.2.3.4} \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^4 - \text{etc.}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{von } y = -\frac{\pi}{4\varrho} \\ \text{bis } y = +\frac{\pi}{4\varrho} \end{array} \right)$$

$$\sigma = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

die Reihe aus der vorhergehenden resultirt, wenn man in jedem Gliede zu seiner Grenze für  $\varrho = 0$  übergeht, und von  $y = -\infty$  bis  $y = +\infty$  convergent ist. Es bezeichne ferner  $\varphi(\varrho)$  die Reihe  $\cos \frac{1}{\varrho} y$ . Wir wollen beweisen, dass  $\sigma - \varphi(\varrho)$  sich mit  $\varrho$  gleichzeitig der Null nähert.

Zu dem Ende betrachte man die Differenz der beiden Reihen

$$s = 1 + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.},$$

$$f(\varrho) = 1 + \frac{1+\varrho}{1.2} \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^2 + \frac{(1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho)}{1.2.3.4} \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^4 + \text{etc.};$$

denen die erste für jedes  $y$ , die andere für alle  $y$  zwischen  $-\frac{\pi}{4\varrho}$  und  $+\frac{\pi}{4\varrho}$  convergirt. Man hat

$$\begin{aligned} f(\varrho) - s &= \left[ (1+\varrho) \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^2 - y^2 \right] \cdot \frac{1}{1.2} \\ &+ \left[ (1+\varrho)(1+2\varrho)(1+3\varrho) \left( \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} \right)^4 - y^4 \right] \cdot \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese Reihe genügt allen Bedingungen des zweiten Theorems, denn alle Glieder sind positiv, und werden immer kleiner, wenn  $\varrho$  abnimmt, da dies von dem absoluten Werth der Grösse  $\frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho}$  anzuwiesen werden kann\*). Es convergirt also  $f(\varrho) = s$  gleichzeitig mit  $\varrho$  gegen Null, folglich auch  $\sigma = \varphi(\varrho)$ , da diese Grösse absolut niemals grösser als die vorhergehende ist.

Geht man nun zu den Grenzen über\*\*), so kommt

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \quad \left( \begin{array}{l} \text{von } y = -\infty \\ \text{bis } y = +\infty \end{array} \right)$$

Auf ähnliche Art gelangt man mit Hülfe der Reihe für  $\sin y$  zu der bekannten Entwicklung von  $\sin y$ , wobei wir uns nicht länger aufzuhalten brauchen.

### Von den Doppelreihen.

9. Doppelreihe heisst jede Verbindung von Horizontal- und Vertikalreihen, deren jede ins Unendliche fortgeht, sie wird durch folgendes Schema dargestellt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^{(1)}_1, v^{(1)}_2, v^{(1)}_3, \text{ etc.} \\ v^{(2)}_1, v^{(2)}_2, v^{(2)}_3, \text{ etc.} \\ v^{(3)}_1, v^{(3)}_2, v^{(3)}_3, \text{ etc.} \\ \text{etc. etc. etc.} \end{array} \right.$$

Als Grundlage unserer Untersuchung diene die Annahme, dass

\*) Die Ableitung von  $\psi(\varrho) = \frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho}$  ist  $\psi'(\varrho) = \frac{\varrho y - \frac{1}{2} \sin 2\varrho y}{(\varrho \cos \varrho y)^2}$ ,

also  $> 0$  für ein positives  $y$ , weshalb  $\psi(\varrho)$  mit  $\varrho$  zugleich wächst und abnimmt.

\*\*) Um die Grenze von  $u = \cos \frac{1}{\varrho} \varrho y$  für  $\varrho = 0$  zu finden, hat man  $1 \cos \varrho y = -\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho y)$  gesetzt, nach der logarithmischen Reihe:

$$1 u = \frac{1}{2\varrho} (\operatorname{tg}^2 \varrho y - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 \varrho y + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^6 \varrho y - \text{etc.}) < \frac{1}{2\varrho} \operatorname{tg}^2 \varrho y;$$

aber  $\operatorname{tg} \varrho y = 0$ ,  $\frac{\operatorname{tg} \varrho y}{\varrho} = y$  für  $y = 0$ , folglich  $1 u = 0$ ,  $u = 1$ .



1. alle Horizontalsummen gegen bestimmte Grenzen  $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$  etc. convergiren, und

2 dass die unendliche Reihe

$$u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)}, \text{ etc.}$$

wiederum eine convergente sei.

Hiernach ist jede Doppelreihe auf eine einfache Reihe zurückzuführen, deren Glieder die Summen der unendlichen Horizontalreihen sind. Unter Voraussetzung jener beiden Bedingungen soll die Doppelreihe convergent und die Summe der einfachen Reihe, welche wir sie reducirt haben, ihre Summe genannt werden.

Umgekehrt, man kann die einfache convergente Reihe  $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$ , etc. in eine Doppelreihe umgestalten dadurch, dass man für jedes Glied eine unendliche convergente Reihe setzt. Man kann hiermit verschiedene Absichten verbinden, z. B. die, durch Summation der Vertikalreihe eine stärker convergirende Reihe oder gar die Summe der ursprünglichen einfachen Reihe zu erhalten.

Ob das hier angedeutete Verfahren aber zulässig sei, ist zu erörtern. Es ist nöthig, dass jede Vertikalreihe convergent sei, zweitens dass die Summen der Vertikalreihen wiederum eine convergente Reihe bilden, und drittens ist fraglich, ob die Summe der Vertikalreihe der Summe der Doppelreihe gleich komme. Man kann diese drei Bedingungen im Allgemeinen aus der Convergenz der Doppelreihe sich nicht als nothwendige Folge ergeben lassen. Die nachstehende Betrachtungen lehren.

1. Indem die beiden Bedingungen in 9. als erfüllt angenommen werden, setze man allgemein

$$u^{(p)} = v^{(p)}_1 + v^{(p)}_2 + v^{(p)}_3 + \dots + v^{(p)}_n + R^{(p)}_n,$$

$$\sigma^{(m)}_p = v^{(1)}_p + v^{(2)}_p + v^{(3)}_p + \dots + v^{(m)}_p;$$

wo  $R^{(p)}_n$  die Ergänzung der Horizontalreihe, und  $\sigma^{(m)}_p$  die Summe der  $m$  ersten Glieder der Vertikalreihe ist. Dies giebt

$$(2) \quad u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(m)} = \sigma^{(m)}_1 + \sigma^{(m)}_2 + \dots + \sigma^{(m)}_n \\ + R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \dots + R^{(m)}_n.$$

Betrachtet man nun  $m$  als constant, und lässt  $n$  ins Unendliche gehen, so convergirt die zweite Summe rechter Hand gegen  $u$ , da dies von jedem ihrer  $m$  Glieder in Folge der ersten Bedingung in 9. gilt; die Summe (2) linker Hand bleibt ferner constant, folglich kommt

$$(3) \quad u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(m)} = \sigma^{(m)}_1 + \sigma^{(m)}_2 + \sigma^{(m)}_3 + \dots + \text{in inf.}$$

d. h. wenn  $m$  Horizontalreihen convergent sind, wo eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so bilden die gliedrigen Vertikalsummen ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe dem Aggregat der  $m$  Horizontalsummen gleich ist.

Lässt man nun in (3) die Zahl  $m$  unendlich werden, so convergirt die Summe linker Hand gegen eine bestimmte Grenze (die Summe der Doppelreihe) in Folge der zweiten Bedingung in 9, folglich wird die Summe rechter Hand sich derselben Grenze nähern, oder, wenn  $s$  die Summe der Doppelreihe genannt wird, kommt

$$(4) \quad s = \text{Lim} [\sigma^{(m)}_1 + \sigma^{(m)}_2 + \sigma^{(m)}_3 + \text{in inf.}],$$

wo das Zeichen Lim. bedeutet, dass  $m$  unendlich werden soll. Man würde nun einen bedeutenden Fehlschluss machen, wenn man statt des Ausdrucks rechter Hand den folgenden setzte:

$$\text{Lim } \sigma^{(m)}_1 + \text{Lim } \sigma^{(m)}_2 + \text{Lim } \sigma^{(m)}_3 + \text{in inf.}$$

Denn es ist einerseits zu bemerken, dass  $\sigma^{(m)}_1, \sigma^{(m)}_2, \text{etc.}$  mit unendlich werdendem  $m$  gar keinen bestimmten Grenzen nähern brauchen, und andererseits dass, wenn dies auch stattfindet, die Gleichung  $\text{Lim} [\sigma^{(m)}_1 + \sigma^{(m)}_2 + \text{in inf.}] = \text{Lim} \sigma^{(m)}_1 + \text{Lim} \sigma^{(m)}_2 + \text{in inf.}$  dennoch völlig unrichtig sein kann. Der Grund dieser Behauptung ergibt sich aus den weiter oben angestellten Betrachtungen, und man wird nun übersehen, wie eng die Theorie der Doppelreihe mit unseren früheren Betrachtungen zusammenhängt.

Vermag man die unendliche Reihe  $\sigma^{(m)}_1, \sigma^{(m)}_2, \sigma^{(m)}_3, \text{etc.}$  summiren, so gelangt man zur Summe der Doppelreihe ( $s$ ), wenn man in jener Summe, die eine Function von  $m$  sein wird, die Zahl  $m$  unendlich werden lässt. Die Gl. (4) kann also von Nutzen sein.

**Beispiel. Die Doppelreihe**

$$\begin{cases} 1, -x, x^2, -x^3, \text{etc.} \\ 1, -2_1x, 3_2x^2, -4_3x^3 \text{ etc.} \\ 1, -3_1x, 4_2x^2, -5_3x^3 \text{ etc.} \\ \text{etc. etc. etc.} \end{cases}$$

ist unserer Definition zufolge convergent, wenn  $x$  positiv und kleiner als die Einheit; die Summen der Horizontalreihen sind

$$\frac{1}{1+x}, \left(\frac{1}{1+x}\right)^2, \left(\frac{1}{1+x}\right)^3, \text{etc.},$$

und diese Reihe convergirt gleichfalls unter der gemachten Voraussetzung, ihre Summe  $= \frac{1}{x}$ . — Die Vertikalreihen sind aber sämmtlich divergent, indem

$$m_1, -(m+1)_2 x, +(m+1)_3 x^2, - \text{etc.},$$

Werthe für die  $m$ gliedrigen Vertikalsummen, mit  $m$  zugleich werden. Nach (4) ist aber  $s = \text{Lim. } [m_1 - (m+1)_2 x + \text{etc.}]$

$$n. \left[ \frac{1 - (1+x)^{-m}}{x} \right] = \frac{1}{x}, \text{ wie vorhin.}$$

1. Da die Convergenz der Vertikalreihen im Allgemeinen nothwendige Folge aus der der Doppelreihe ist, so wollen wir annehmen, dass alle Vertikalreihen gegen bestimmte Grenzwert convergiren, und die letzteren mit  $\sigma_1, \sigma_2, \text{etc.}$  bezeichnen.

Nimmt man in (2)  $m = \infty$ ,  $n$  als constant betrachtend, so erhält sich

$$(5) \quad s = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)} + \text{in inf.} = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n \\ + R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + R^{(3)}_n + \text{in inf.},$$

Die Ergänzungen der Horizontalreihen bilden eine convergente Reihe. Ob nun die Reihe  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \text{etc.}$  convergent oder divergent hängt davon ab, was aus  $R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \text{in inf.}$  wird, in dem Unendliche wächst. In Betreff der Anwendungen, welchen Doppelreihen gemacht werden, ist nun der Fall beizubringen, wo die Vertikalsummen eine convergente Reihe bilden. Wir setzen wir unter dieser Voraussetzung  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \text{etc.} = \sigma$ , was (5)

$$(6) \quad s - \sigma = \text{Lim}_{n=\infty} [R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + R^{(3)}_n + \text{etc.}].$$

Man kann auch alle Glieder rechter Hand für  $n = \infty$  verschwinden lassen. Es folgt keineswegs, dass die Summe dieser Reihe mit unendlich werdendem  $n$  ebenfalls verschwindet; sie kann vielmehr einen sehr beträchtlichen Werth haben, oder selbst unendlich werden.

Vorausgesetzt also, dass alle Horizontalreihen in dem Schema convergent sind, und auch ihre Summen eine convergente Reihe bilden, dass ferner alle Vertikalreihen convergent sind, und ihre Summen eine convergente Reihe geben, so braucht doch die erste Summe ( $s$ ) nicht der zweiten ( $\sigma$ ) gleich zu sein. Der Unterschied zwischen  $s$  und  $\sigma$  lässt sich nach der Formel (4) auch so ausdrücken:

$$(7) \quad s - \sigma = \text{Lim}_{n=\infty} [(\sigma^{(m)}_1 - \sigma_1) + (\sigma^{(m)}_2 - \sigma_2) + (\sigma^{(m)}_3 - \sigma_3) + \text{etc.}].$$

Als Anwendung dieser Formeln kann folgendes Beispiel dienen, auf welches ich schon im Th. XI. des Archivs p. 319 aufmerksam gemacht habe.

Die Doppelreihe sei

13. Noch wird folgender Satz öfter mit Nutzen angewandt:

Es seien die Vorzeichen der Glieder der Doppelreihe so beschaffen, wie das folgende Schema zeigt:

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & \text{etc.} \\ + & - & + & - & + & - & \text{etc.} \\ + & - & + & - & + & - & \text{etc.} \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \end{array}$$

Die Horizontalreihen sollen convergent sein und ihre Summen eine convergente Reihe mit der Summe  $s$  bilden. Wenn alsdann alle Vertikalreihen convergiren, ihre Summen eine convergente Reihe bilden, und wenn endlich die numerischen Werthe der Glieder in jeder Horizontalreihe fortwährend abnehmen, so hat die Reihe der Vertikalsummen ebenfalls die Grösse  $s$  zur Grenze.

**Beweis.** Setzt man allgemein, die obigen Bezeichnungen beibehaltend,  $\pm v^{(p)}_{n+1} \pm v^{(p)}_{n+2} \pm v^{(p)}_{n+3} \text{etc.} = \pm R^{(p)}_n$ , so erhellt, dass unter den gemachten Voraussetzungen  $R^{(p)}_n < v^{(p)}_{n+1}$  ist. Die Vertikalreihe  $\pm v^{(1)}_{n+1}, \pm v^{(2)}_{n+1}, \pm v^{(3)}_{n+1}, \text{etc.}$ , wo die Zeichen sich auf einander beziehen, ist convergent, folglich convergirt die Reihe  $\pm R^{(1)}_n, \pm R^{(2)}_n, \pm R^{(3)}_n \text{etc.}$  ebenfalls, und man hat

$$R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + R^{(3)}_n + \text{etc.} < v^{(1)}_{n+1} + v^{(2)}_{n+1} + v^{(3)}_{n+1} + \text{etc.},$$

d. i.  $< \sigma_{n+1}$ ;

da nun wegen der Convergenz der Reihe  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{etc.}$  das allgemeine Glied  $\sigma_{n+1}$  für  $n = \infty$  verschwindet, so gilt dasselbe von  $R^{(1)}_n + R^{(2)}_n + \text{etc.}$ , daher nach (5)  $s = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \text{etc.}$

### III.

## Ueber Aristarchs Methode zur Bestimmung der Entfernung der Sonne von der Erde.

Von  
dem Herausgeber.

---

Ueber Aristarchs Methode zur Bestimmung der Entfernung der Sonne von der Erde habe ich schon im Archiv Thl. V. S. 401. eine Abhandlung geliefert, in der ich mich vorzugsweise der Elemente der gewöhnlichen Trigonometrie bedient habe, will nun aber in dem vorliegenden Aufsätze diese Aufgabe noch mit Hülfe der analytischen Geometrie behandeln, weil ich die auf diesem Wege von mir gefundene Auflösung für nicht ganz uninteressant halte. Als eine Uebung für Schüler, selbst in der praktischen Anwendung des Spiegelsextanten zur Messung der Winkel, scheint mir diese Methode immer noch einen wohlbegründeten Werth zu besitzen, und daher die folgende neue Behandlung wohl zu verdienen.

Durch das Auge des Beobachters, durch den Mittelpunkt der Sonne, und den Mittelpunkt des Monds denken wir uns eine Ebene gelegt, in welcher alle folgenden Winkelmessungen ausgeführt werden. Diese Ebene sei in Taf. I. Fig. 5. die Ebene des Papiers. Bemerke ich nun, dass in dieser Figur  $E$  das Auge des Beobachters,  $O$  der Mittelpunkt des Monds und  $O_1$  der Mittelpunkt der Sonne sein soll, so wird dieselbe im Uebrigen ganz durch sich selbst verständlich sein\*). Gemessen wird

---

\*) Zur weiteren Erläuterung der Methode Aristarchs verweise ich auf Thl. V. S. 401.

Winkel  $AEB$  zwischen der Lichtstrahl und dem äusseren und inneren Sonnenrande. Ich im Folgenden durch  $\alpha$  bezeichnen. Den scheinbaren Halbmesser  $\Delta$  des Monds, und den Winkel  $\omega$  der Sonne, welchen letzteren wir positiv betrachten wollen, jenachdem der Beobachter der äusseren oder inneren Sonnenrande entspricht. Den Abstand des erleuchteten Mondrandes vom äusseren oder inneren Sonnenrande, welchen wir  $\Delta_1$  bezeichnen. Bezeichnen wir nun den Winkel  $\omega$  als positiv oder als negativ betrachtete Grösse des erleuchteten Theils des Monds, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\alpha = \omega - \Delta,$$

also aus den gemessenen Winkeln  $\alpha$ ,  $\omega$  berechnet werden; man könnte, um den Winkel  $\omega$  der scheinbaren Grösse des erleuchteten Theils des Monds davon dessen scheinbaren Halbmesser abzuziehen. Obige vorausgesetzt, in völliger Allgemeinheit:

$$\alpha = \omega - \Delta = 0 + \Delta - \Delta_1.$$

Die Halbmesser des Monds und der Sonne seien  $r$  und  $R$ , die Abstände der Mittelpunkte dieser beiden Körper vom Auge des Beobachters wollen wir durch  $\rho$  und  $\rho_1$  bezeichnen.

Wir nehmen das Auge des Beobachters als den Anfang des Coordinatensystems der  $xy$  an; die durch den Beobachter, den Mittelpunkt des Monds und den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebene sei die Ebene der  $xy$ ; der Ursprung der  $x$  sei von dem Auge des Beobachters nach der Sonne hin gerichtet, und der positive Winkel  $\alpha$  werde so genommen, dass er von dem Auge des Beobachters nach der Seite der Axe der  $x$  liegt, auf welcher der Mittelpunkt des Monds befindet. Dies vorausgesetzt, sind die Coordinaten des Mittelpunkts des Monds:

$$x = \rho \cos(\alpha - \omega), \quad y = \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta);$$

die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne sind:

$$x_1 = \rho_1, \quad y_1 = 0.$$

Die Radien der beiden Kreise, in denen von der Beobachter die Oberflächen des Monds und der Sonne gesehen werden, sind:

Die Winkel  $\alpha$  und  $\omega$  wegen der Refraction corrigiren, und die Höhen des Monds und der Sonne messen.

$$1) \quad \begin{cases} \{x - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 + \{y - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 = r^2, \\ (x - \varrho_1)^2 + y^2 = r_1^2. \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Berührungspunkte der an diese beiden Kreise gezogenen gemeinschaftlichen äusseren Tangenten mit diesen beiden Kreisen für den Mond und die Sonne respective durch  $p, q$  und  $p_1, q_1$ ; so haben wir nach 1) die Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 + \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 = r^2, \\ (p_1 - \varrho_1)^2 + q_1^2 = r_1^2. \end{cases}$$

Die gemeinschaftlichen Berührenden werden durch die Gleichung

$$3) \quad \begin{cases} y - q = \frac{q - q_1}{p - p_1} (x - p), \text{ oder} \\ y - q_1 = \frac{q - q_1}{p - p_1} (x - p_1) \end{cases}$$

charakterisirt; und die Gleichungen der nach den Berührungspunkten gezogenen Halbmesser des Mondes und der Sonne sind:

$$4) \quad \begin{cases} y - q = \frac{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)}{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)} (x - p), \\ y - q_1 = \frac{q_1}{p_1 - \varrho_1} (x - p_1). \end{cases}$$

Es ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$5) \quad \begin{cases} 1 + \frac{q - q_1}{p - p_1} \cdot \frac{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)}{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)} = 0, \\ 1 + \frac{q - q_1}{p - p_1} \cdot \frac{q_1}{p_1 - \varrho_1} = 0. \end{cases}$$

In den vier Gleichungen 2) und 5) müssten die Coordinaten  $p, p_1, q_1$  bestimmt werden. Es lassen sich aber aus den in 5) stehenden Gleichungen verschiedene andere Gleichungen ableiten, welche die Rechnung erleichtern, indem es uns übrigens nicht eigentlich auf die Kenntniss der Coordinaten  $p, q, p_1$ , selbst ankommt.

Aus den beiden Gleichungen 5) ergibt sich die Gleichung

$$6) \quad \frac{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)}{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)} = \frac{q_1}{p_1 - \varrho_1},$$

$$q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) = \frac{q_1}{p_1 - \varrho_1} \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

und folglich nach der ersten der Gleichungen 2):

$$\{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 \left\{1 + \left(\frac{q_1}{p_1 - \varrho_1}\right)^2\right\} = r^2$$

oder

$$\{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 \{(p_1 - \varrho_1)^2 + q_1^2\} = r^2 (p_1 - \varrho_1)^2,$$

d. i. nach der zweiten der Gleichungen 2):

$$r_1^2 \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\}^2 = r^2 (p_1 - \varrho_1)^2.$$

Folglich ist

$$r_1 \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} = \pm r (p_1 - \varrho_1).$$

Verbindet man nun mit dieser Gleichung die Gleichung 6), so erhält man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$r_1 \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} = \pm r (p_1 - \varrho_1),$$

$$r_1 \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\} = \pm r q_1.$$

Für die äusseren Tangenten, auf die es uns hier nur ankommt, haben offenbar

$$p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \text{ und } p_1 - \varrho_1$$

gleiche Vorzeichen, und für diese Tangenten müssen wir daher in den vorstehenden Gleichungen die oberen Zeichen nehmen, wodurch wir erhalten:

$$7) \quad \begin{cases} r_1 \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} = r (p_1 - \varrho_1), \\ r_1 \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\} = r q_1. \end{cases}$$

Weil, wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, je nachdem  $\Delta_1$  positiv oder negativ ist,

$$8) \quad r = \varrho \sin \Delta, \quad r_1 = \pm \varrho_1 \sin \Delta_1$$

ist; so werden die Gleichungen 7):

$$9) \quad \begin{cases} \varrho_1 \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \sin \Delta_1 = \pm \varrho (p_1 - \varrho_1) \sin \Delta, \\ \varrho_1 \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\} \sin \Delta_1 = \pm \varrho q_1 \sin \Delta; \end{cases}$$

oder



$$9^*) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{p}{\varrho} - \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \right\} \sin \Delta_1 = \pm \left( \frac{p_1}{\varrho_1} - 1 \right) \sin \Delta, \\ \left\{ \frac{q}{\varrho} - \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \right\} \sin \Delta_1 = \pm \frac{q_1}{\varrho_1} \sin \Delta. \end{cases}$$

Nach 5) haben wir ferner die Gleichungen:

$$(p - p_1) \{ p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} + (q - q_1) \{ q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} = 0, \\ (p - p_1)(p_1 - \varrho_1) + (q - q_1)q_1 = 0;$$

oder

$$p^2 + q^2 = pp_1 + qq_1 + \varrho \{ (p - p_1) \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + (q - q_1) \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}, \\ p_1^2 + q_1^2 = pp_1 + qq_1 - \varrho_1(p - p_1).$$

Wegen der Gleichungen 2) ist aber:

$$p^2 + q^2 = 2\varrho \{ p \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + q \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} + r^2 - \varrho^2, \\ p_1^2 + q_1^2 = 2\varrho_1 p_1 + r_1^2 - \varrho_1^2;$$

oder nach 8):

$$p^2 + q^2 = 2\varrho \{ p \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + q \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} - \varrho^2 \cos \Delta^2, \\ p_1^2 + q_1^2 = 2\varrho_1 p_1 - \varrho_1^2 \cos \Delta_1^2.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$2\varrho \{ p \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + q \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} - \varrho^2 \cos \Delta^2 \\ = pp_1 + qq_1 + \varrho \{ (p - p_1) \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + (q - q_1) \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}, \\ 2\varrho_1 p_1 - \varrho_1^2 \cos \Delta_1^2 = pp_1 + qq_1 - \varrho_1(p - p_1);$$

oder

$$pp_1 + qq_1 = \varrho \{ (p + p_1) \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + (q + q_1) \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} - \varrho^2 \cos \Delta^2, \\ pp_1 + qq_1 = \varrho_1(p + p_1) - \varrho_1^2 \cos \Delta_1^2.$$

Also ist

$$\varrho \{ (p + p_1) \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + (q + q_1) \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} - \varrho^2 \cos \Delta^2 \\ = \varrho_1(p + p_1) - \varrho_1^2 \cos \Delta_1^2,$$

oder

$$10) \quad \varrho^2 \cos \Delta^2 - \varrho_1^2 \cos \Delta_1^2 = - \{ \varrho_1 - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \cdot (p + p_1) \\ + \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \cdot (q + q_1).$$

Endlich hat man offenbar auch die Gleichung:

$$11) \quad q = p \operatorname{tang}(\alpha - \Delta_1).$$

Nach dem Obigen (9)) ist:

$$p_1 - q_1 = \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta} \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q_1 = \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta} \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

also

$$p + p_1 = q_1 + p \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta} \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q + q_1 = q \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta} \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

oder

$$p + p_1 = q_1 + \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \{p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)\},$$

$$q + q_1 = \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) + \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \{q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)\};$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} & \varrho_1^2 \cos^2 \Delta_1 - \varrho^2 \cos^2 \Delta = \varrho_1^2 - \varrho^2 \cos^2(\alpha - \omega - \Delta_1) \\ & + \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \{ \varrho_1 - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \{ p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ & - \varrho^2 \sin^2(\alpha - \omega - \Delta_1) - \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \{ q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ & = \varrho_1^2 - \varrho^2 + \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \{ \varrho_1 - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \{ p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ & - \{1 \pm \frac{\varrho_1 \sin \Delta_1}{\varrho \sin \Delta}\} \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \{ q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}; \end{aligned}$$

also, wie sogleich erhellet:

$$\begin{aligned} & \varrho \sin \Delta (\varrho \sin \Delta \mp \varrho_1 \sin \Delta_1) \\ & = \{ \varrho_1 - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \{ p - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ & - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \{ q - \varrho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}. \end{aligned}$$

Weil ferner

$$q = p \operatorname{tang}(\alpha - \Delta_1)$$

ist, so ist

$$(\alpha - \omega - \Delta_1) = p \tan(\alpha - \Delta_1) - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \tan(\alpha - \Delta_1) \\ + \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \tan(\alpha - \Delta_1) \\ - \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1),$$

ie man leicht findet:

$$- \rho \sin \omega = \sin(\alpha - \Delta_1) \cdot \{ p - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ - \cos(\alpha - \Delta_1) \cdot \{ q - \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}.$$

Elimination von

$$q - \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)$$

l sich:

$$\sin \Delta \mp \rho_1 \sin \Delta_1 \sin \Delta \cos(\alpha - \Delta_1) + \rho^2 \sin \omega \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \\ = \{ \rho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \rho \cos \omega \} \{ p - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \},$$

nach Elimination von

$$p - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)$$

man:

$$\sin \Delta \mp \rho_1 \sin \Delta_1 \sin \Delta \sin(\alpha - \Delta_1) + \rho \{ \rho_1 - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \sin \omega \\ = \{ \rho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \rho \cos \omega \} \{ q - \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}.$$

Man nun auf beiden Seiten dieser Gleichungen und addirt  
dann zu einander, so erhält man, weil nach dem Obigen

$$\{ \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \}^2 + \{ q - \rho \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}^2 = r^2 = \rho^2 \sin^2 \Delta$$

ie bemerkenswerthe Gleichung:

$$\sin \Delta \mp \rho_1 \sin \Delta_1 \sin \Delta \cos(\alpha - \Delta_1) + \rho \sin \omega \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}^2 \\ \sin \Delta \mp \rho_1 \sin \Delta_1 \sin \Delta \sin(\alpha - \Delta_1) + (\rho_1 - \rho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)) \sin \omega \}^2 \\ = \{ \rho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \rho \cos \omega \}^2 \sin^2 \Delta;$$

wenn man

$$12) \quad u = \frac{\rho}{\rho_1}$$

die Gleichung:

$$\sin \Delta \mp \sin \Delta_1 \sin \Delta \cos(\alpha - \Delta_1) + u \sin \omega \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \}^2 \\ \sin \Delta \mp \sin \Delta_1 \sin \Delta \sin(\alpha - \Delta_1) + (1 - u \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)) \sin \omega \}^2 \\ = \{ \cos(\alpha - \Delta_1) - u \cos \omega \}^2 \sin^2 \Delta,$$

$$\begin{aligned} & \{ (\sin \Delta^2 \cos(\alpha - \Delta_1) + \sin \omega \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)) u \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \cos(\alpha - \Delta_1) \}^2 \\ & + \{ (\sin \Delta^2 \sin(\alpha - \Delta_1) - \sin \omega \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)) u \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \sin(\alpha - \Delta_1) + \sin \omega \}^2 \\ & = \sin \Delta^2 \{ \cos(\alpha - \Delta_1) - u \cos \omega \}^2. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung müsste man das Verhältniss  $u$  der Entfernungen  $\varrho$  und  $\varrho_1$  des Mondes und der Sonne von der Erde bestimmen; die Rechnung wird aber etwas weitläufig, und das folgende Verfahren führt, wie es mir scheint, kürzer zum Zweck. Aus dem Obigen erhält man leicht:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \\ &+ \frac{(\varrho \sin \Delta \mp \varrho_1 \sin \Delta_1) \sin \Delta \cos(\alpha - \Delta_1) + \varrho \sin \omega \sin(\alpha - \omega - \Delta_1)}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega}, \\ \frac{q}{\varrho} &= \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \\ &+ \frac{(\varrho \sin \Delta \mp \varrho_1 \sin \Delta_1) \sin \Delta \sin(\alpha - \Delta_1) + \{ \varrho_1 - \varrho \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \} \sin \omega}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega} \end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\varrho} &= \cos(\alpha - \Delta_1) \frac{\varrho_1 \{ \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \} - \varrho \cos \Delta^2}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega}, \\ \frac{q}{\varrho} &= \sin(\alpha - \Delta_1) \frac{\varrho_1 \{ \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \} - \varrho \cos \Delta^2}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega}; \end{aligned}$$

wobei man die leicht zu beweisende Relation

$$\sin \omega + \cos(\alpha - \Delta_1) \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) = \sin(\alpha - \Delta_1) \cos(\alpha - \omega - \Delta_1)$$

zu beachten hat. Also ist

$$\frac{p^2 + q^2}{\varrho^2} = \left\{ \frac{\varrho_1 \{ \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \} - \varrho \cos \Delta^2}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega} \right\}^2.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{p^2 + q^2}{\varrho^2} = 2 \left\{ \frac{p}{\varrho} \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) + \frac{q}{\varrho} \sin(\alpha - \omega - \Delta_1) \right\} - \cos \Delta^2,$$

also.

$$\frac{p^2 + q^2}{\varrho^2} = 2 \cos \omega \frac{\varrho_1 \{ \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \} - \varrho \cos \Delta^2}{\varrho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \varrho \cos \omega} - \cos \Delta^2;$$

und setzen wir nun

$$13) \quad v = \frac{\rho_1 \{ \cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 \} - \rho \cos \Delta^2}{\rho_1 \cos(\alpha - \Delta_1) - \rho \cos \omega}$$

$$= \frac{\cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 - u \cos \Delta^2}{\cos(\alpha - \Delta_1) - u \cos \omega},$$

ist nach dem Vorhergehenden:

$$v^2 = 2v \cos \omega - \cos \Delta^2$$

oder

$$v^2 - 2v \cos \omega + \cos \Delta^2 = 0,$$

oraus, wenn man die Quadratwurzel positiv und negativ nimmt,

$$v = \cos \omega + \sqrt{\cos \omega^2 - \cos \Delta^2}$$

oder

$$v = \cos \omega + \sqrt{\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega)}$$

folgt. Aus der Gleichung 13) ergibt sich aber:

$$u = \frac{\cos(\alpha - \omega - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 - v \cos(\alpha - \Delta_1)}{\cos \Delta^2 - v \cos \omega},$$

also

$$= \frac{\sin \omega \sin(\alpha - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 - \cos(\alpha - \Delta_1) \sqrt{\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega)}}{\cos \Delta^2 - \cos \omega^2 - \cos \omega \sqrt{\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega)}}$$

oder

$$= \frac{\sin \omega \sin(\alpha - \Delta_1) \mp \sin \Delta \sin \Delta_1 - \cos(\alpha - \Delta_1) \sqrt{\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega)}}{-\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega) - \cos \omega \sqrt{\sin(\Delta + \omega) \sin(\Delta - \omega)}},$$

sich nun noch frägt, mit welchem Vorzeichen man in dieser Formel die Quadratwurzel zu nehmen hat, worüber sich auf folgende Art eine Entscheidung geben lässt.

Erstens ist zu bemerken, dass

$$v = \cos \omega + \sqrt{\cos \omega^2 - \cos \Delta^2}$$

immer positiv ist, man mag die Quadratwurzel positiv oder negativ nehmen, weil im vorliegenden Falle  $\cos \omega$  immer positiv ist. Ferner ist nach dem Obigen

$$\frac{q}{\rho} = v \sin(\alpha - \Delta_1),$$

d. i.

$$\frac{q}{\rho} = v \sin \angle E O_1.$$

Nähme man nun  $\sqrt{\cos\omega^2 - \cos\Delta^2}$  positiv, so wäre  $v > \cos$

$$\frac{q}{\rho} > \cos\omega \sin AEO_1,$$

d. i.

$$q > \rho \cos\omega \sin AEO_1,$$

oder

$$q > EO \cdot \cos\omega \sin AEO_1.$$

Es ist aber

$$q = EA \cdot \sin AEO_1,$$

also

$$EA \cdot \sin AEO_1 > EO \cdot \cos\omega \sin AEO_1,$$

woraus

$$EA > EO \cdot \cos\omega$$

folgt, was offenbar falsch ist, da der Winkel  $EOA$  hier falls stumpf, folglich

$$EA < EO \cdot \cos\omega$$

ist, wie augenblicklich erhellt, wenn man sich von  $O$  a über  $A$  verlängerte  $EA$  ein Perpendikel gefällt denkt. muss man

$$\sqrt{\cos\omega^2 - \cos\Delta^2} = \sqrt{\sin(\Delta + \omega)\sin(\Delta - \omega)}$$

negativ nehmen, und daher nach dem Obigen

13)

$$u = \frac{\sin\omega \sin(\alpha - \Delta_1) \mp \sin\Delta \sin\Delta_1 + \cos(\alpha - \Delta_1) \sqrt{\sin(\Delta + \omega)\sin(\Delta - \omega)}}{\cos\omega \sqrt{\sin(\Delta + \omega)\sin(\Delta - \omega)} - \sin(\Delta + \omega)\sin(\Delta - \omega)}$$

setzen. Mittelst dieser Formel, in welcher man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem  $\Delta_1$  positiv oder negativ ist, d. h. jenachdem der Winkel  $\alpha$  dem äusseren oder inneren Sonnenrande entspricht, kann man das Verhältniss

$$u = \frac{\rho}{\rho_1}$$

unmittelbar aus den gemessenen Winkeln berechnen, und hiemit  $\rho$ , d. h. die Entfernung des Mondes von der Erde, andererseits bestimmt, so kennt man auch die Entfernung

$$14) \quad \rho_1 = \frac{\rho}{u}$$

der Sonne von der Erde.

## IV.

# Über einige Aufgaben der höhern Geometrie.

Von

dem Herrn Professor Dr. Dienger

an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

### I.

Wickelt man einen Faden auf eine ebene Kurve, fasst einen Endpunkte und beschreibt mit demselben eine Kurve, indem man den Faden von der gegebenen Kurve abwickelt, d. h. während gespannt erhält, so beschreibt er eine Evolvente der gegebenen Kurve.

Geometrisch gesprochen wird also die Erzeugungsweise der Evolvente folgende sein: In einem Punkte  $(x_1, y_1)$  der gegebenen Kurve ziehe man eine Tangente und nehme auf derselben einen Punkt an, dessen Entfernung vom Punkte  $(x_1, y_1)$  gleich der Entfernung irgend eines beliebigen andern Punkte  $(x, y)$  dieser Kurve von derselben Tangente sei, in der Richtung wie vorhin, einen Punkt an, dessen Entfernung vom Punkte  $(x, y)$  gleich  $a$  dem Bogen der Kurve sei, der zwischen dem anfänglich gewählten Punkte  $(x_1, y_1)$  und dem jetzigen Punkte  $(x, y)$  enthalten ist. Der Ort dieser Punkte auf den verschiedenen Tangenten ist nun die Evolvente.

Sei  $(\alpha, \beta)$  ein Punkt der Evolvente, der dem Punkte  $(x, y)$  der gegebenen Kurve, welche in so ferne Evolute heisst, entspricht, so ist die Bogenlänge vom Punkte  $(x_1, y_1)$  zum Punkte  $(x, y)$  gleich

$$\pm \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx,$$

je nachdem der Bogen wächst mit wachsendem  $x$  oder nicht. nun die Abwicklung so vor sich, dass mit wachsendem  $x$  der abgewickelte Bogen wächst, wie in Taf. I. Fig. 3., so ist  $x > \alpha$ , während

$$AB = + \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx,$$

also

$$BB' = a + \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Geht sie aber so vor sich, dass mit wachsendem  $x$  der gewickelte Bogen abnimmt, wie in Taf. I. Fig. 4., so ist

$$x < \alpha \text{ und } AB = - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx,$$

also

$$BB' = a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx.$$

Zugleich ist immer

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \left(a \pm \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx\right)^2,$$

worin die Zeichen nach obigen Bestimmungen zu wählen. Da ferner der Punkt  $(\alpha, \beta)$  in der Tangente im Punkte  $(x, y)$  so ist

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x} (\alpha - x);$$

aus welcher Gleichung, in Verbindung mit (1), folgt, dass in der ersten Figur:

$$\alpha - x = \frac{-a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta - y = \frac{-a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x};$$



im Falle der zweiten:

$$\alpha - x = \frac{a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta - y = \frac{a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x};$$

Die Formeln sich in eine einzige zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} \alpha - x &= \frac{\mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}, \\ \beta - y &= \frac{\mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x}; \end{aligned} \quad (3)$$

Die obern Zeichen im Falle der ersten, die untern im Falle der zweiten Figur gelten.

Die Grösse  $a$  hat den Charakter einer willkürlichen Konstante, so dass es also unendlich viele Evolventen einer Kurve gibt. Die allgemeine Gleichung derselben wird erhalten, wenn in den Gleichungen (3)  $y$  durch  $x$  ersetzt, vermöge der gegenseitigen Gleichung der Evolute, und sodann  $x$  zwischen beiden Gleichungen eliminirt.

Aus (3) folgt:

$$\begin{aligned} (\alpha - x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} &= \mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx, \\ \frac{(\beta - y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}} &= \mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx. \end{aligned} \quad (3')$$

Aus (3) folgt ferner, dass  $\alpha$  und  $\beta$  Funktionen von  $x$  und dass man also die Differentialquotienten  $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$  aus Gleichungen ziehen kann. Man erhält, wenn man die (3') anw

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - 1\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + \frac{(\alpha - x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{(\beta - y) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} - \frac{(\beta - y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

woraus:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] + (\alpha - x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial y}{\partial x} - (\beta - y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Beachtet man die Gleichung (2), so ergibt sich hierau

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \text{ d. h. } \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + 1 = 0;$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Tangente im Punkt der Evolute Normale sei in dem entsprechenden Punkte (o Evolvente).

Daraus ergibt sich nun, dass alle Evolventen einer g  
nen Kurve einander parallel seien, so dass die Lehrsatz  
parallele Kurven ohne Weiteres auf sie anwendbar sind.  
darüber Crelle: Sammlung mathematischer Au  
und Bemerkungen, zweiter Band. S. 204 ff.). Z  
ergibt sich daraus eine andere, oftmals bequemere Art, di  
chung der Evolventen zu erhalten. Man eliminire nämlich  
telst der Gleichung der Evolute  $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}$  aus den zwei Gleic

$$(\alpha - x) \frac{\partial y}{\partial x} - (\beta - y) = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + 1 = 0; \quad (5)$$

so wird das Resultat die Differentialgleichung sämmtlicher Evolventen sein.

Es erhellt aus dem Obigen, dass die Evolute einer gegebenen (ebenen) Kurve nichts Anderes ist, als die einhüllende Kurve aller Normalen dieser letzteren, so dass, wenn  $(xy)$  ein Punkt der gegebenen Kurve ist, man die Gleichung ihrer Evolute erhalten wird, wenn man mittelst der Gleichung der gegebenen Kurve  $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  eliminirt zwischen den Gleichungen:

$$\alpha - x + \frac{\partial y}{\partial x} (\beta - y) = 0, \quad -1 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\beta - y) = 0; \quad (6)$$

so dass die erhaltene Gleichung zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  die gesuchte Gleichung der Evolute ist. Eine gegebene Kurve hat also eine einzige Evolute. Aus den zwei Gleichungen (6) folgt zugleich auch, dass die Evolute die Kurve der Krümmungsmittelpunkte der gegebenen krummen Linie ist.

Es könnte bei dieser Art, die Untersuchung zu führen, die Frage entstehen, ob eine Kurve, die zu einer gegebenen Kurve in einem solchen Verhältniss stehe, dass ihre Punkte sämmtlich auf den Tangenten der gegebenen Kurve liegen, jeder Punkt auf einer andern, und dass diese Tangenten zugleich Normalen an die gesuchte Kurve seien, nothwendig eine Evolvente der gegebenen Kurve sei. Die eben angegebenen Bedingungen, in die analytische Sprache eingekleidet, geben die Gleichungen (5), aus denen unmittelbar die (3') abgeleitet werden, welche die Frage bejahen. Dass dies so ist, lässt sich leicht beweisen. Aus der ersten Gleichung (5) folgt, wenn man nach  $x$  differenzirt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + (\alpha - x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Ferner ist das Resultat der Elimination von  $\frac{\partial y}{\partial x}$  zwischen den (5):

$$(\alpha - x) \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\beta - y) \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0,$$

und wenn man obigen Werth von  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$  einsetzt und beachtet, dass

$$\frac{\beta - y}{\alpha - x} = \frac{\partial y}{\partial x}:$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] + (\alpha - x) \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \text{ und}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial y}{\partial x} - (\beta - y) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

welche Gleichungen die Differentialgleichungen von (3') sind.

Gesetzt, die (gegebene) Gleichung der Evolute sei

$$y^2 = \frac{8}{27p} (x-p)^3,$$

so ist

$$y \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{12}{27p} (x-p)^2,$$

$$y = \frac{12}{27p} \cdot \frac{(x-p)^2}{\frac{\partial y}{\partial x}} = - \frac{12}{27p} (x-p)^2 \frac{\partial \beta}{\partial \alpha},$$

$$(x-p)^2 = \left( \frac{27p y^2}{8} \right)^{\frac{2}{3}};$$

also

$$y = - \frac{p}{\left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^3}, \quad x-p = \frac{3p^{\frac{1}{3}}}{2 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^2};$$

so dass die gesuchte Differentialgleichung ist:

$$(\alpha-p) \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^2 - \frac{p}{2} + \beta \left( \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \right)^3 = 0,$$

oder wenn man  $\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \beta'$  setzt:

$$(\alpha-p) \beta'^2 + \beta \beta'^3 - \frac{p}{2} = 0, \quad \beta = \frac{p}{2\beta'^3} - \frac{\alpha-p}{\beta'}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach  $\alpha$ :

$$\beta' = - \frac{3p}{2\beta'^4} \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} + \frac{(\alpha-p) \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha}}{\beta'^2} - \frac{1}{\beta'},$$

oder

$$\left( \beta' + \frac{1}{\beta'} \right) \partial \alpha + \left( \frac{3p}{2\beta'^4} + \frac{p}{\beta'^2} \right) \delta \beta' - \frac{\alpha}{\beta'^2} \partial \beta' = 0,$$

welche Gleichung zwischen den zwei Veränderlichen  $\alpha$  und  $\beta'$ , in dem man sie schreibt:

$$(\beta'^6 + \beta'^3) \partial \alpha + \left( \frac{3p}{2} + p\beta'^2 \right) \partial \beta' - \alpha \beta'^2 \partial \beta' = 0,$$

zum Integral hat:

$$\alpha = e^{\int \frac{\partial \beta'}{\beta'^3 + \beta'}} \left[ C - \int \frac{\frac{3p}{2} + p\beta'^2}{\beta'^6 + \beta'^3} e^{-\int \frac{\partial \beta'}{\beta'^3 + \beta'}} \partial \beta' \right].$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial \beta'}{\beta'^3 + \beta'} = \int \frac{\partial \beta'}{\beta'(\beta'^2 + 1)} = \int \frac{\partial \beta'}{\beta'} - \int \frac{\beta' \partial \beta'}{1 + \beta'^2} = 1. \left( \frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \right);$$

also

$$e^{-\int \frac{\partial \beta'}{\beta'^3 + \beta'}} = \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\beta'}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3p}{2} + p\beta'^2}{\beta'^6 + \beta'^3} e^{-\int \frac{\partial \beta'}{\beta'^3 + \beta'}} &= \frac{3p}{2} \frac{\sqrt{1 + \beta'^2}}{\beta'^4(1 + \beta'^2)} + \frac{p\beta' \sqrt{1 + \beta'^2}}{\beta'^3(1 + \beta'^2)} \\ &= \frac{3p}{2} \cdot \frac{1}{\beta'^4 \sqrt{1 + \beta'^2}} + \frac{p}{\beta'^2 \sqrt{1 + \beta'^2}}. \end{aligned}$$

Das Integral dieser Grösse nach  $\beta'$  ist:

$$-\frac{p}{2\beta'^3} \sqrt{1 + \beta'^2},$$

so dass also das gesuchte Integral ist:

$$\alpha + \frac{\beta'}{\sqrt{1 + \beta'^2}} \left[ C - \frac{p}{2\beta'^3} \sqrt{1 + \beta'^2} \right] = 0;$$

eliminiert man nun zwischen dieser Gleichung und

$$(\alpha - p) \beta'^2 + \beta \beta'^3 - \frac{p}{2} = 0$$

die Grösse  $\beta'$ , so erhält man die Gleichung der Evolvente.

Für den Fall, dass  $C=0$ , erhält man dadurch  $\beta^2 = 2p\alpha$ , die Gleichung der Parabel, wie bekannt.

## II.

Dehnt man dieselbe Betrachtungsweise auf Kurven doppelter Krümmung aus, so erhält man, wenn man unter einer Evolvente einer doppelt gekrümmten Kurve eine krumme Linie versteht, die durch den einen Endpunkt eines Fadens beschrieben wird, der sich von der gegebenen Kurve abwickelt, die Gleichungen der Evolvente, wenn man mittelst der Gleichungen der gegebenen Kurve  $x, y, z$  eliminirt zwischen:

(7)

$$\alpha - x = \frac{\mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}},$$

$$\beta - y = \frac{\mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\gamma - z = \frac{\mp a - \int_{x_1}^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \frac{\partial z}{\partial x};$$

in welchen Formeln die obern Zeichen gelten, wenn die Abwicklung so vor sich geht, dass der abgewickelte Bogen wächst mit wachsendem  $x$ , die untern im entgegengesetzten Falle.

Durch Differentiation nach  $x$  zieht man aus den Gleichungen (7):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] + (\alpha - x) \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \frac{\partial y}{\partial x} \\ + (\beta - y) \left[ \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \frac{\partial z}{\partial x} \\ + (\gamma - z) \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] = 0; \end{aligned}$$

Während

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x} (\alpha - x), \quad \gamma - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\alpha - x).$$

Daraus ergibt sich nun, indem man obige Gleichungen addirt:

$$\left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] = 0,$$

b.

$$1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

welche Gleichung aussagt, dass die Tangente im Punkte  $(xyz)$  der gegebenen Kurve (Evolute) eine Normale an die Evolvente im entsprechenden Punkte  $(\alpha\beta\gamma)$  ist.

Die Evolvente hat also ebenfalls die Eigenschaft auf den Tangenten an die Evolute senkrecht zu stehen und sie sämmtlich zu schneiden. Nun lässt sich leicht nachweisen, dass jede Kurve, welche diese Eigenschaften hat, nothwendig eine Evolvente der gegebenen Kurve sein muss.

Sei nämlich  $(xyz)$  ein Punkt der gegebenen Kurve,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Koordinaten desjenigen Punkts der mit den genannten Eigenschaften begabten Kurve, der in der Tangente an die erste Kurve liegt, so hat man als analytischen Ausdruck der zwei Eigenschaften die Gleichungen:

$$\beta - y = \frac{\partial y}{\partial x} (\alpha - x), \quad \gamma - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\alpha - x), \quad 1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

welche Gleichungen man auch nach  $x$  differenziren darf, indem man  $\alpha, \beta, \gamma$  als Funktionen von  $x$  ansieht. Aus den ersten zwei folgt:

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\alpha - x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + (\alpha - x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

Während die dritte auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Führt man hier obige Werthe von  $\frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \gamma}{\partial x}$  ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -(\alpha - x) \frac{\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = -\frac{1}{2}(\alpha - x) \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}.$$

Daraus folgt durch Integration:

$$\alpha = e^{-\int \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \partial x} \left[ C + \int \frac{x \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} \partial x \right] \frac{1}{\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \partial x}.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \left[ C + \frac{1}{2} \int x \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \right] \frac{\partial x}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}} \right].$$



Durch theilweise Integration ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \int \frac{x \frac{\partial}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} dx$$

$$= x \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} - \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} dx,$$

also endlich:

$$\alpha - x = \frac{c - \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}},$$

und daraus:

$$\beta - y = \frac{c - \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\gamma - z = \frac{c - \int \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2} dx}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}} \frac{\partial z}{\partial x};$$

welche Gleichungen nichts Anderes sind, als die Gleichungen (7), und somit die Behauptung rechtfertigen.

Eine jede Tangente an die Evolute liegt also in der Normal-ebene der Evolvente, die in dem, dem angenommenen Punkte entsprechenden Punkte errichtet ist. Daraus folgt, dass der Durchschnittspunkt zweier auf einander folgender Tangenten in der Geraden liegen muss, in der zwei auf einander folgende Normalebenen der Evolvente sich schneiden. Daraus ergibt sich denn der bekannte Satz, dass eine Evolute einer gegebenen Kurve doppelter Krümmung sich in der abwickelbaren Fläche befinden muss, die der Ort aller dieser Durchschnittslinien ist.

Zugleich folgt aber auch, dass eine gegebene Kurve doppelter Krümmung unendlich viele Evoluten habe. Es lässt sich dies geometrisch einfach so nachweisen: Seien  $a, b, c, \dots$  eine Reihe auf einander folgender Punkte der gegebenen Kurve;  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  die diesen Punkten entsprechenden geraden Linien in der abwickelbaren Fläche (nebenbei gesagt, Gerade, die auf den Krümmungsebenen

der gegebenen Kurve und zwar im Mittelpunkte erster Krümmung senkrecht stehen). Von  $a$  aus ziehe man nach einem beliebigen Punkte  $\alpha'$  von  $\alpha$  die Gerade  $a\alpha'$  und lege durch  $a\alpha'$  und  $ab$  eine Ebene, welche die Gerade  $\beta$  in einem Punkte  $\beta'$  schneiden wird, der (nebst  $\alpha'$ ) ein Punkt der Evolute sein wird; durch  $b\beta'$  und  $bc$  lege man wieder eine Ebene, welche die Gerade  $\gamma$  im Punkte  $\gamma'$  schneiden wird, der ein dritter Punkt der fraglichen Evolute sein wird, u. s. w. Offenbar ist nämlich  $\alpha'\beta'$  die Verlängerung von  $a\alpha'$ , da  $a\alpha'$  in der durch  $a$  gehenden Normalebene liegt, in der  $\alpha$  und  $\beta$  liegen; eben so ist  $\beta'\gamma'$  die Verlängerung von  $b\beta'$ , ....., und  $a\alpha'$ ,  $b\beta'$ , ... sind Normalen an die gegebene Kurve; mithin ist nach dem oben Bewiesenen die gegebene Kurve eine Evolvente der erhaltenen, und folglich letztere eine Evolute der gegebenen. In so ferne  $\alpha'$  willkürlich war, giebt es unendlich viele Evoluten einer gegebenen Kurve.

Es lässt sich dies übrigens analytisch in folgender Weise zeigen. Aus den Gleichungen (7) oder (8) folgt, dass wenn  $(xyz)$  ein Punkt der Evolvente,  $(\alpha\beta\gamma)$  der entsprechende Punkt einer Evolute ist, man haben muss:

$$y - \beta = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} (x - \alpha), \quad z - \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} (x - \alpha), \quad 1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad (10)$$

welche Gleichungen man nach  $x$  differenziren darf, indem man  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  als Funktionen von  $x$  ansieht.

Man zieht zunächst aus der Verbindung der drei Gleichungen (10):

$$(x - \alpha) + (y - \beta) \frac{\partial y}{\partial x} + (z - \gamma) \frac{\partial z}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Aus den zwei ersten Gleichungen (10) zieht man:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} (y - \beta) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} (x - \alpha) + \frac{\partial \beta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} (z - \gamma) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} (x - \alpha) + \frac{\partial \gamma}{\partial x};$$

während die dritte giebt:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von  $\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}$ , gezogen aus den vorigen zwei, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} (x-\alpha) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} (x-\alpha) + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial x} (y-\beta) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} (z-\gamma) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} (z-\gamma) = 0,$$

h., wenn man (11) beachtet:

$$(x-\alpha) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} (z-\gamma) = 0.$$

Setzt man hier die Werthe von  $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial x}$  aus den zwei ersten Gleichungen (10), so erhält man:

$$(y-\beta) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (z-\gamma) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 1 = 0, \quad (12)$$

in Folge der dritten Gleichung (10):

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Die Gleichung (11) zeigt, dass der Punkt  $(\alpha\beta\gamma)$  in der Normal-  
ebene die gegebene Kurve im Punkte  $(xyz)$  ist. Da (12) erhalten  
wird, wenn man in (11) nach  $x$  differenzirt, aber  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  als  
constant ansieht, so folgt aus (11) und (12), dass der Punkt  $(\alpha\beta\gamma)$   
auf der Durchschnittslinie zweier unmittelbar auf einander folgender  
Tangentenebenen enthalten ist. Eliminirt man, unter Zuziehung der  
Gleichungen der gegebenen Kurve,  $x$  zwischen den Gleichungen  
(11) und (12), so erhält man die Gleichung der wickelbaren Fläche,  
die der Ort aller dieser Durchschnittslinien ist. Verbindet man  
diese Gleichung mit der aus den zwei ersten Gleichungen hervor-  
gehenden Gleichung (nachdem man  $x$  eliminirt), so sind diese zwei  
Gleichungen die einer Evolute. Da aber dieselben Differential-  
gleichungen sind, so folgt daraus, dass es unendlich viele Evolu-  
te gebe.

Dass dieselben Sätze auch für ebene Kurven bestehen, ist  
klar, da die mehrfach angeführte abwickelbare Fläche ist dann eine  
Ebene, die auf der Ebene der Kurve senkrecht steht, und  
die l. vorzugsweise so genannte Evolute ist eben die Kurve  
der Krümmungsmittelpunkte.

Dass bei doppelt gekrümmten Kurven die Kurve der Krüm-  
mungsmittelpunkte nicht Evolute der Kurve ist, folgt daraus schon,  
dass die auf einander folgenden Krümmungshalbmesser (erster  
Krümmung) einander nicht schneiden, wie dies leicht nachgewie-  
sen werden kann. Sind nämlich  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Koordinaten des dem  
Punkte  $(x, y, z)$  entsprechenden Krümmungsmittelpunkts, so müssen

dieselben ausser den Gleichungen (11) und (12) noch der

chung:

$$(x-\alpha)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-(y-\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(z-\gamma)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

genügen.

Sind  $X, Y, Z$  laufende Koordinaten, so sind also die

chungen des Krümmungshalbmessers:

$$X-x=\frac{\alpha-x}{\gamma-z}(Z-z), \quad Y-y=\frac{\beta-y}{\gamma-z}(Z-z).$$

Lässt man  $x$  um  $\partial x$  wachsen, wodurch  $y, z, \alpha, \beta, \gamma$  res  
 $\frac{\partial y}{\partial x}\partial x, \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial x}\partial x$  werden, so erhält man die Gleichung des n  
 liegenden Krümmungshalbmessers. Damit beide sich schn  
 muss:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta-y}{\gamma-z}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma x-\alpha z}{\gamma-z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha-x}{\gamma-z}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma y-\beta z}{\gamma-z}\right),$$

d. h. nach leichter Reduktion:

$$\begin{aligned} (\gamma-z)\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}-\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(\beta-y)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \\ +(\alpha-x)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0 \end{aligned}$$

sein. Zieht man aus (11), (12), (13) die Werthe von  $\gamma-z, \beta-y$   
 und substituirt sie in (14), so erhält man nach leichter Red  
 die Gleichung:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0.$$

Differenzirt man nun die Gleichung (13) nach  $x$ , indem man  
 als Funktionen dieser Grösse ansieht, so erhält man, wenn  
 (15) beachtet:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)(x-\alpha)-\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(y-\beta)+\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(z-\gamma)=0,$$

und wenn man hier wieder die Werthe von  $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$   
 substituirt und reduziert:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

welche Gleichung bekanntlich ausdrückt, dass die betrachtete l

eben ist, so dass also ein Schneiden der Krümmungshalbmesser nur bei solchen Kurven statt hat.

### III.

Sei  $A$  ein Punkt einer krummen Oberfläche, deren Gleichung  $u=0$  sei; man nehme die Tangentialebene im Punkte  $A$  als Ebene der  $xy$ ;  $A$  zum Anfangspunkt der Koordinaten und die Normale in  $A$  zur Axe der  $z$ ; zugleich seien die Axen der  $x$  und  $y$  so gerichtet, dass die Ebenen der  $xz$  und  $yz$  zusammenfallen mit den beiden Haupt-(krümmungs)-schnitten der krummen Oberfläche im Punkte  $A$ . Alsdann ist bekanntlich  $x=y=z=0$ , d.h. im Punkte  $A$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=0. \quad (17)$$

Man gehe nun vom Punkte  $A$  aus auf der krummen Oberfläche nach einem (unendlich) nahen Punkte  $B$  so, dass  $AB$  mit der Axe der  $x$  den Winkel  $\varphi$  mache und mithin die Gleichungen der Tangente an  $AB$  in  $A$  sind:  $z=0$ ,  $y=x \operatorname{tg} \varphi$ . Sind nun  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  die Koordinaten von  $B$ , so ist  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$  für ein unendlich abnehmendes  $\Delta x$ ; zugleich sind die Gleichungen der im Punkte  $B$  an die krumme Oberfläche gezogenen Normale:

$$Z - \Delta z = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta z} (X - \Delta x),$$

$$Z - \Delta z = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta z} (Y - \Delta y);$$

wenn man in den vorkommenden Differentialquotienten  $x=y=z=0$  setzt, wobei dann die Gleichungen (17) zu beachten sind.

Man lege nun durch die Axe der  $z$  und die Tangente  $AB$  im Punkte  $A$  eine Ebene, so ist deren Gleichung  $y - x \operatorname{tg} \varphi = 0$ , und die im Punkte  $A$  auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie hat zu Gleichungen:

$$z=0, \quad x + \operatorname{tg} \varphi \cdot y = 0. \quad (18)$$

Ist nun  $\varepsilon$  der Winkel der Normale an die Fläche im Punkte  $B$  und der durch die Axe der  $z$  und  $AB$  gelegten Ebene;  $\varepsilon'$  der Winkel zwischen eben dieser Linie und der Linie (18), so ist

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon' = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta z - \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta z \right)}{\sqrt{\left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta z \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta y + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \Delta z \right]^2 + \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \Delta z \right]^2} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{\Delta z}{\Delta x} = 0,$$

Dividirt man beiderseitig mit  $\Delta x$ , bemerkt, dass an der Gränze ( $\Delta x = 0$ ),

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 + \left( \frac{\Delta z}{\Delta x} \right)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \Delta s, \text{ also } \Delta x = \frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}};$$

78

so ergibt sich, wenn  $\sin \varepsilon = \varepsilon$  gesetzt wird:

$$\frac{\varepsilon \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\frac{\partial u}{\partial z} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \operatorname{tg} \varphi}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \cdot \sin \varphi,$$

also

$$\frac{\varepsilon}{\partial s} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Ist nun  $\varrho_1$  der Krümmungshalbmesser des Schnitts, den die Ebene der  $xz$  in die krumme Oberfläche macht,  $\varrho_2$  der für den Schnitt mit der Ebene der  $yz$ , so ist bekanntlich

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1}{\varrho_2};$$

wenn man die Krümmungshalbmesser mit dem ihnen gehörenden Vorzeichen nimmt. Demnach ist:

$$\frac{\varepsilon}{\partial s} = \left( \frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{\sin 2\varphi}{2}, \quad (19)$$

ein Satz, den bekanntlich schon Bertrand im Liouville'schen Journale (1844) bewiesen hat, und worin  $\partial s$  die Länge des Elements  $AB$  bedeutet, dessen Richtung durch den Winkel  $\varphi$  gegeben ist.

Ist  $AB$  ein Element einer auf der krummen Oberfläche von  $A$  aus gezogenen kürzesten Linie, so ist die Ebene durch  $AB$  und die Normale in  $A$  eine Krümmungsebene dieser Kurve, so wie die Krümmungsebene derselben in  $B$  durch die Normale in  $B$  an die Oberfläche geht. Der Winkel  $\varepsilon$  ist alsdann der Winkel zweier unmittelbar auf einander folgender Krümmungsebenen, während  $\frac{\partial s}{\varepsilon}$  der Werth des Halbmessers  $r$  der zweiten Krümmung im Punkte  $A$  ist. Demnach ist, im Falle einer kürzesten (geodätischen) Linie:

$$r = \frac{2\varrho_1\varrho_2}{(\varrho_1 - \varrho_2)\sin 2\varphi}, \quad (20)$$

welchen Satz Tortolini in seiner Abhandlung: Sulla determinazione della Linea Geodesica etc... (Atti dell' Accademia pontificia de nuovi Lincei, anno IV. — Sessione VI dell' 11. Maggio 1851) S. 33 ff. angewendet hat, um den Halbmesser zweiter Krümmung der geodätischen Linien auf einem dreiaxigen Ellipsoid zu finden.

Für  $\varrho_1 = \varrho_2$  sind alle kürzesten Linien, die durch den Punkt  $A$  gehen, eben; dessgleichen sind diejenigen eben, deren Richtung in die Richtung der Hauptschnitte fällt ( $\varphi = 0$ , oder  $\frac{\pi}{2}$ ). Die kür-

zesten Linien auf einer krummen Fläche sind also nur dann durchgängig ebene Kurven, wenn die betreffende Fläche eine Kugel ist. In keinem andern Falle werden alle kürzesten Linien ebene Kurven sein, ja selbst dann nicht, wenn auch einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser beständig unendlich gross ist. Ebenso werden auch die Krümmungslinien einer krummen Linie nur in so ferne kürzeste Linien sein können, als sie ebene Kurven sind. Umgekehrt, wenn die Krümmungslinien ebene Kurven sind, so müssen sie nothwendig kürzeste Linien auf der Oberfläche sein. Die Krümmungsebene einer solchen Kurve (die Ebene der Kurve selbst) enthält nämlich immer die Normale der krummen Fläche in demselben Punkte, mithin ist die Kurve eine kürzeste Linie.

## IV.

Sei  $u=0$  die Gleichung einer krummen Oberfläche;  $x=az+b$ ,  $y=a'z+b'$  die Gleichungen einer Geraden, welche auf diese Oberfläche projiziert wird: man verlangt die Gleichungen der Projektion dieser Geraden auf die gegebene Oberfläche.

Die Gleichungen der Normale an die gegebene Oberfläche im Punkte  $(xyz)$  sind:

$$X-x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} (Z-z), \quad Y-y = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} (Z-z).$$

Da dieselbe nun durch einen Punkt  $(x'y'z')$  der gegebenen Geraden gehen soll, so muss folglich:

$$x'-x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} (z'-z), \quad y'-y = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}} (z'-z), \quad x'=az'+b, \quad y'=a'z'+b' \quad (21)$$

sein. Daraus folgt:

$$(az'+b-x) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} (z'-z), \quad (a'z'+b'-y) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} (z'-z).$$

Setzt man in diesen Gleichungen für  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  ihre Werthe aus der Gleichung der krummen Oberfläche und eliminirt  $z'$  aus denselben, so erhält man eine Gleichung in  $x, y, z$ , die, verbunden mit  $u=0$ , die Gleichungen der gesuchten Projektion ausmacht. Demnach sind dieselben:



$$=0, \frac{\partial u}{\partial x}(y-a'z-b') + \frac{\partial u}{\partial y}(az+b-x) + \frac{\partial u}{\partial z}(a'x-ay+ab'-a'b)=0, \quad (22)$$

wie man leicht findet.

Will man den Punkt  $(x'y'z')$  haben, der dem Punkte  $(xyz)$  der Kurve (22) entspricht, d. h. dessen Projektion letzterer ist, so werden drei der Gleichungen (21) diese Aufgabe lösen.

Für den Fall der Kugel  $x^2+y^2+z^2=r^2$  ist  $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}=2y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}=2z$ , also die zweite Gleichung (22):

$$by - b'x + (ab' - a'b)z = 0,$$

d. h. die Projektion gehört einem grössten Kreise der Kugel an, wie das zu erwarten war.

## V.

Sei  $g$  die Beschleunigung der Schwere,  $s$  der Bogen einer (ebenen) Kurve, längs der herab ein schwerer Körper fällt, so dass wir uns die Ebene der Kurve vertikal denken, wobei der Bogen vom tiefsten Punkte der Kurve aus gerechnet werden soll. Die Vertikale durch diesen Punkt sei Axe der  $z$  und eine in der Ebene der Kurve liegende Horizontale durch jenen Punkt Axe der  $x$ , so ist, wenn die Bewegung im leeren Raume vor sich geht:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -g \frac{\partial z}{\partial s}, \quad (23)$$

wenn  $t$  die Zeit bedeutet. Wir wollen nun die Kurve so zu bestimmen suchen, dass sie eine Tautochrone sei, d. h. eine Kurve, in der ein fallender Körper immer in derselben Zeit nach dem tiefsten Punkte gelangt, von welchem Punkte er auch ausgehen möge, in so ferne seine Anfangsgeschwindigkeit Null ist.

Aus (23) folgt:

$$2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \frac{\partial s}{\partial t} = -2g \frac{\partial z}{\partial t} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = -2gz + C;$$

und da für  $z=h$ ,  $\frac{\partial s}{\partial t}=0$ :

$$\left( \frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = 2g(h-z).$$

d. h.

$$\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}{2g(h-z)} = \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2, \quad t\sqrt{2g} = \int_0^h \frac{\frac{\partial s}{\partial z} \cdot \partial z}{\sqrt{h-z}}.$$

Nun soll  $s$  als Funktion von  $z$  so bestimmt werden, dass letzteres Integral einen konstanten Werth erhält, was auch  $h$  sei. Man setze desshalb:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \psi(z), \quad s = \int \partial z \cdot \frac{\psi z}{\sqrt{z}};$$

so wird also

$$\int_0^h \frac{\psi(z) \partial z}{\sqrt{z(h-z)}} = \int_0^h \frac{\psi(hz) \partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = C$$

sein müssen. Nun ist

$$\int_0^1 \frac{\psi(hz) \partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = \psi(h\theta) \int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{z(1-z)}} = \pi \psi(h\theta),$$

wenn  $\theta$  zwischen 0 und 1; also muss, was auch immer  $h$  sei,  $\psi(h\theta)$  konstant sein, d. h. man wird offenbar  $\psi(z)$  selbst gleich einer Konstanten haben müssen. Demnach

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{A}{\sqrt{z}}, \quad s = 2A\sqrt{z},$$

was bekanntlich eine Zyklode ausdrückt, welches somit die Tautochrone im leeren Raume ist.

## VI.

Wenn auf einer krummen Oberfläche eine geodätische Linie gezogen (gemessen) werden soll, so geschieht dies in folgender Weise:

Man lässt die Messstange  $AB$  auf die Fläche auflegen (wobei wir, wenn wir uns z. B. die Erde als die krumme Fläche denken, wohl annehmen dürfen, die geradlinige Messstange liege in ihrer ganzen Länge wirklich auf, d. h.  $AB$  sei als ein Element der entstehenden krummen Linie zu betrachten); in dem Endpunkte  $B$  errichtet man eine Normale an die krumme Fläche, legt sodann eine zweite Messstange  $BC$  (etwa gleich  $AB$ ) in die Verlängerung von  $AB$  und dreht nun diese  $BC$  so, dass sie beständig in der Ebene bleibt, welche durch die Normale in  $B$  und  $AB$  geht, und sich auf die krumme Fläche legt; in  $C$  verfährt man

wieder wie in  $B$  u. s. f. \*). Daraus folgt, dass die durch die Elemente  $AB$ ,  $BC$  gehende Ebene zugleich die Normale der krummen Fläche in  $B$  in sich enthält, aus welcher Eigenschaft es sehr leicht sein wird, die Gleichungen der geodätischen Linie abzuleiten.

Sei nämlich  $u=0$  die Gleichung der krummen Oberfläche, so sind die Gleichungen der Normale in dem Punkte  $(xyz)$  derselben, wenn  $X, Y, Z$  die laufenden Koordinaten bedeuten:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(X-x) = \frac{\partial u}{\partial x}(Z-z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(Y-y) = \frac{\partial u}{\partial y}(Z-z). \quad (24)$$

Beziehen sich die Differentialquotienten  $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$  auf die geodätische, durch  $(xyz)$  gehende Kurve, worin  $\partial s$  das Element derselben bedeutet, so ist bekanntlich die Gleichung der durch zwei auf einander folgende Elemente gehenden Ebene — der Krümmungsebene:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) (X-x) + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) (Y-y) \\ & + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) (Z-z) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Zieht man nun aus (24) die Werthe von  $X-x$ ,  $Y-y$  und setzt sie in (25), so muss diese Gleichung erfüllt sein, was auch immer der Werth von  $Z-z$  sei, d. h. man muss haben:

$$(26) \quad \left( \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Da die geodätische Kurve aber auf der krummen Oberfläche liegt, so ist auch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} &= 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1, \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= 0; \end{aligned}$$

welche letzteren zwei Gleichungen aus einem bekannten allgemeinen Satz der analytischen Geometrie stammen. Eliminirt man ver-

---

\*) Es kommt dies darauf hinaus, mittelst des Fernrohrs eines Theodolithen, das sich bloss in einer Ebene bewegt, die einen Normal-schnitt der Erde bildet, das Anlegen der Messstangen zu regeln, indem man den Theodolithen jeweils in  $B, C, \dots$  aufstellt.

mittelst der ersten dieser Gleichungen  $\frac{\partial u}{\partial z}$  aus (26), so erhält man:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right] \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

d. h. wenn man die zweite beachtet:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \left( \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \left[ \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right] \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

oder endlich, wenn man die dritte beachtet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (27)$$

welche Gleichung, in Verbindung mit  $u=0$ , die geodätische Kurve bezeichnet.

Bekanntlich ist (27) auch die Gleichung der kürzesten Linien auf einer krummen Oberfläche, so dass also die geodätischen Kurven diese Eigenschaft haben.

Für den Fall der Erde ist

$$u = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{a^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{a^2};$$

also die Gleichung (27):

$$y \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0, \quad x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s} = C;$$

so dass die Gleichungen einer geodätischen Linie auf der Erde sind:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x \frac{\partial y}{\partial x} - y = C \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2}$$

$$(\text{oder: } x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s} = C).$$

## VII.

Sei  $a$  die halbe grosse Axe des Erdellipsoids,  $b$  die halbe kleine,  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ ; ferner  $B$  die geographische Breite eines Punktes  $M$  des Erdellipsoids, dessen Meridian wir als den ersten annehmen wollen,  $B'$  die geographische Breite eines zweiten Punktes  $N$ , und der Längenunterschied beider gleich  $\lambda$  \*). Auf den in  $M$  und  $N$  errichteten Normalen denken wir uns zwei Punkte  $M'$ ,  $N'$ , deren Entfernungen von  $M$  und  $N$   $h$  und  $h'$  seien. Alsdann sind die Koordinaten des Punktes  $M'$ :

$$\left(h + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}\right) \cos B, 0, \left(h + \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}\right) \sin B;$$

Von  $N'$ :

$$\left(h' + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B'}}\right) \cos B' \cos \lambda, \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B'}}\right) \cos B' \sin \lambda, \\ \left(h' + \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B'}}\right) \sin B'.$$

(Vergleiche Archiv, Theil VII., S. 73.) Die Grössen  $h$  und  $h'$  pflegt man gewöhnlich die Höhen der Punkte  $M'$ ,  $N'$  über der Meeresfläche zu heissen. Um nun das Azimuth der geodätischen Linie  $MN$  zu bestimmen, pflegt man in der Geodäsie den Winkel zu messen, der gebildet wird von der Projektion der Geraden  $M'N'$  auf die in  $M'$  auf  $MM'$  senkrecht gestellte (Horizontale) Ebene und der Durchschnittslinie der Meridianebene durch  $M$  mit derselben Ebene. Dieser Winkel ist aber, strenge genommen, nicht das wirkliche Azimuth, das man, aus den so eben gemachten Angaben, berechnen könnte, und wir wollen nun jenen Winkel bestimmen, um ihn dann mit dem wahren Azimuthe zu vergleichen.

Die Gleichungen der Normale  $MM'$  finden sich leicht:

$$y = 0, z = x \operatorname{tg} B - \frac{a e^2 \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}};$$

---

\*) Die Breite vom Aequator aus nach Norden von 0 bis 90°, nach Süden von 0 bis -90°; die Länge von Westen nach Osten von 0 bis 360° gezählt. Zugleich ist der Mittelpunkt der Erde Anfangspunkt der Koordinaten, die Ebene des Aequators Ebene der  $xy$ , die nach dem Nordpol gerichtete Erdaxe Axe der  $z$ ; die Axe der  $x$  liegt im Osten, die der  $y$  im 90sten Meridiangrad.

demnach ist die Gleichung der durch  $MM'$  und den Punkt  $N'$  gehenden Ebene:

$$Z - z' + m(y - y') + n(x - x') = 0,$$

wenn  $x', y', z'$  die oben angegebenen Werthe der Koordinaten von  $N'$  sind. Soll diese Ebene die Gerade  $MM'$  enthalten, so muss, wenn

$$y = 0, \quad z = x \operatorname{tg} B - \frac{a e^2 \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

gesetzt wird, diese Gleichung identisch erfüllt sein. Daraus folgt:

$$n = -\operatorname{tg} B,$$

$$-m = \frac{\left(h' + \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}}\right) \sin B' - \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}}\right) \cos B' \cos \lambda \operatorname{tg} B + \frac{a e^2 \sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}}{\left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}}\right) \cos B' \sin \lambda}$$

Der verlangte Winkel ist nun aber offenbar der Winkel, den die Ebene  $MM'N'$  mit der Meridianebene durch  $M$  (d. h. mit der Ebene der  $xz$ ) macht. Der Cosinus desselben ist somit

$$\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}} \sin B' - \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right) \cos B' \cos \lambda \operatorname{tg} B + \frac{ae^2 \sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \left\{ \left(h' + \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right) \sin B' - \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right) \cos B' \cos \lambda \operatorname{tg} B + \frac{ae^2 \sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \right\}^2} + \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)^2 \frac{\cos^2 B' \sin^2 \lambda}{\cos^2 B}$$

36

$$= \frac{\left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right) (\sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos \lambda) + \frac{ae^2 \sin B \cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} - \frac{ae^2 \sin B' \cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}}{\left\{ \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right) (\sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos \lambda) + \frac{ae^2 \sin B \cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} - \frac{ae^2 \sin B' \cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}} \right\}^2} + \left(h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B'}}\right)^2 \cos^2 B' \sin^2 \lambda$$

Das Quadrat der Tangente jenes Winkels ist demnach :

$$\left[ \left( h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right) (\sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos \lambda) + \frac{a e^2 \sin B \cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} - \frac{a e^2 \sin B' \cos B'}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right]^2,$$

d. h. die Tangente ist:

$$\begin{aligned} & \pm \left( h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right) \cos B' \sin \lambda \\ & \pm \left( h' + \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right) (\sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos \lambda) + \frac{a e^2 \sin B \cos B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} - \frac{a e^2 \sin B' \cos B'}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \\ & \pm \left( \frac{h'}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right) \cos B' \sin \lambda \\ & \pm \left( \frac{h'}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right) (\sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos \lambda) + e^2 \cos B \left( \frac{\sin B}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}} - \frac{\sin B'}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B'}} \right). \end{aligned} \quad (28)$$



Die Größe  $\frac{r}{a}$  wird in der Regel so klein sein, dass man sie  
 viel vernachlässigen können, oder es wird es mit

$$r = aB \left( \frac{\sin B}{1 - \sin^2 B} - \frac{\sin B}{1 - \sin^2 B} \right)$$

der Fall sein, wenn  $B$  mit  $B$ , die gewöhnlich wenig von einander  
 verschieden sind.

Will man aber nicht vernachlässigen, so wird man nach 29  
 immer den entsprechenden Winkel berechnen können. Wir wollen  
 den Fall untersuchen, da  $B = B$ . Alsdann wird 29 zu:

$$\pm \frac{\cos B \sin i}{\sin B \cos B 1 - \cos i} = \pm \frac{\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} i}{\sin B \pm \sin^2 \frac{1}{2} i} = \pm \frac{\cos \frac{1}{2} i}{\sin B}$$

Wir wollen nun  $i = 20^\circ$ ,  $B = 52^\circ 12' 53.51''$  annehmen, und  
 den Winkel dazwischen berechnen.

Es ist also:

$$\begin{aligned} \log \cotg \frac{1}{2} i &= 11.75478513 \\ - \log \sin B &= 0.09570321 \\ \hline \log r &= 11.85048834 \\ r &= 89^\circ 12' 16''.16124 \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Azimuth der geodätischen Linie  $MN$  di-  
 rekt berechnen, indem wir dabei von den Gaussischen Formeln  
 (a. a. O.) ausgehen.

Zunächst haben wir nun die Punkte  $M$  und  $N$  auf die Kugel  
 überzutragen. Die Breite der ihnen entsprechenden Punkte  $M_1$ ,  
 $N_1$  auf der Kugel ist  $52^\circ 40' 0'' 0000$  (Gauss, S. 9).

Was den Längenunterschied  $\lambda_1$  der Punkte  $M_1$ ,  $N_1$  auf der  
 Kugel anbelangt, so ist:

$$\lambda_1'' = a\lambda'' \text{ (S. 6), } \log a = 0.0001966353,$$

also da

---

<sup>\*)</sup> Vergleiche: Gauss, Untersuchungen über Gegenstände  
 der höhern Geodäsie. Seite 10.

$$\log \lambda'' = 3.8573324964$$

$$\log \alpha = 0.0001966553$$

---


$$\log \lambda_1'' = 3.8575291517$$

$$\lambda_1'' = 7203.26109 = 2^\circ 0' 3'' .26109.$$

Man hat also ein sphärisches Dreieck aufzulösen, in dem zwei Seiten gleich  $90^\circ - 52^\circ 40'$ , und der von ihnen gebildete Winkel  $2^\circ 0' 3'' .26109$  ist. Der Winkel  $z$ , welcher der einen der gleichen Seiten entgegensteht, wird folglich erhalten aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{cotg} 1^\circ 0' 1'' .63054}{\sin 52^\circ 40'}.$$

Nun ist

$$\log \operatorname{cotg} 1^\circ 0' 1'' .63054 = 11.7578818321$$

$$-\log \sin 52^\circ 40' = 0.0995668873$$

---


$$\log \operatorname{tg} z = 11.8574487194$$

$$z = 89^\circ 12' 16'' .16159,$$

welcher Werth von dem oben für  $x$  gefundenen erst in der vierten Dezimalstelle der Sekunden abweicht. Es ergibt sich daraus, dass man den beobachteten Winkel  $x$  unbedenklich für den zu suchenden  $z$  annehmen kann.

---

## V.

# Ueber Foucault's Pendelversuch zum Beweise für die Umdrehung der Erde um ihre Axe.

Von  
dem Herausgeber.

## I.

Das Archiv hat an seine Leser eine Schuld abzutragen. Denn zu den Zwecken, deren Erreichung diese Zeitschrift sich vorgesetzt hat, gehört namentlich auch die Besprechung aller der Erscheinungen auf dem Gebiete der Wissenschaft, welche in irgend einer Beziehung zu besonderer Geltung gekommen sind; und dass zu diesen Erscheinungen recht eigentlich Foucault's höchst merkwürdiger Pendelversuch zum Beweise für die Umdrehung der Erde um ihre Axe gehört, wird gewiss Niemand, am wenigstens ich selbst, in Abrede zu stellen geneigt sein. Dieser Versuch dürfte aber um so mehr eine Besprechung im Archive für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt sein, weil man denselben bekanntlich auch vielfach vor das grosse Publikum zu bringen zweckmässig gefunden hat. Ob man damit recht gethan hat, will ich hier nicht untersuchen, will aber auch nicht verhehlen, dass die Berechtigung zu der bereits so vielfach versuchten öffentlichen Zurschaustellung des wissenschaftlich so überaus merkwürdigen Foucault'schen Versuchs vor den Augen des grossen Publikums mir wenigstens sehr zweifelhaft scheint, und dass ich darin allerdings mehr eine eines wissenschaftlichen Mathematikers oder Physikers nicht sehr würdige Escamotage\*), als einen selbst für

---

\*) Insofern nämlich das grosse Publikum leicht zu der Meinung verleitet wird, etwas von der Sache zu verstehen, was in diesem Falle gar nicht möglich ist, und doch leider oft in dergleichen Fällen geglaubt wird.

das sogenannte gebildete grosse Publikum wirklich überzeugenden Versuch zu finden geneigt bin. Dass ich übrigens mit dieser Ansicht keineswegs isolirt dastehe, beweist mir so eben zu meiner grossen Freude die Art und Weise, wie der von mir hochverehrte treffliche Quetelet in Brüssel, durch dessen ununterbrochene Freundschaft ich seit langer Zeit mich so sehr beglückt und geehrt fühle, sich in dem „Rapport“, welchen er als beständiger Sekretair der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Brüssel über die Arbeiten der „Classe des sciences“ im Jahre 1851 der Akademie erstattet hat, über den Foucault'schen Versuch, namentlich über dessen Popularisirung, ausspricht; und ich kann mir nicht versagen, seine Worte selbst den Lesern des Archivs hier mitzutheilen, wobei ich zu besserem Verständniss bemerke, dass dabei auf ein Memoire eines ausgezeichneten Mathematikers in Gent, Herrn Schaar's, über den Foucault'schen Versuch Bezug genommen ist. Herr Quetelet sagt:

„M. Schaar a étudié, à l'aide de l'analyse, un problème intéressant, qui a eu le privilège d'occuper pendant plusieurs mois l'attention de l'Europe; je veux parler de l'expérience de M. Foucault. A en croire les premiers témoins, on n'avait qu'à ouvrir les yeux pour voir tourner la terre; et quant à l'explication, elle était à la portée de toutes les intelligences. M. Schaar est venu nous dire, et non sans raison, que cette expérience et son explication sont loin d'être aussi simple qu'on le pense, et que des savants fort habiles s'y sont trompés. Il a soumis ce problème de mécanique à un examen approfondi, et il a rendu compte de petites particularités qui avaient été signalées déjà par les meilleurs observateurs, et même à une époque reculée, par les disciples de Galilée; car il s'est trouvé, comme il arrive fréquemment dans les sciences, que l'expérience nouvelle avait été signalée depuis longtemps. Une pareille rencontre, du reste, ne diminue en rien le mérite de celui qui montre l'importance d'un fait que toutes les autres ont méconnu ou perdu de vue.“

Der Grund, warum das Archiv, mit Ausnahme eines Aufsatzes von Herrn Director Eschweiler in Cöln in Thl. XIX. Nr. IV., dessen Darstellung, wie ich gehört aber nicht selbst gesehen habe, auch in eine von Herrn Garthe in Cöln herausgegebene Schrift übergegangen ist, über den Foucault'schen Versuch bisher geschwiegen hat, ist der, weil ich die Acten über denselben noch lange nicht für vollständig spruchreif, viel weniger für geschlossen halte. Eine sehr tiefgehende analytisch-mathematische Behandlung scheint mir jedenfalls nöthig zu sein, wenn man sich eine vollständige Einsicht in die eigenthümliche Natur dieses merkwürdigen Versuchs verschaffen will, und ich kann in dieser Beziehung die Leser des Archivs auf nichts Besseres verweisen, als auf die schon oben erwähnte, nach dem Urtheil kompetenter Richter sehr ausgezeichnete Abhandlung von Herrn Schaar in Gent, die in den „Mémoires de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de

Belgique“\*) nächstens erscheinen wird oder schon erschienen ist; und auf eine treffliche Abhandlung von Herrn Hofrath Clausen in Dorpat, die unter dem Titel: „Ueber den Einfluss der Umdrehung der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben; von Herrn Observator Clausen in Dorpat“ sich in dem „Bulletin phys. mathém. T. X. Nr. 2.“ der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg abgedruckt findet.

So sehr ich aber auch aus vollkommenster Ueberzeugung in dem Studium dieser tief gehenden analytischen Untersuchungen das Wort reden kann, so scheint mir doch bei dem vorliegenden Gegenstande, selbst für den Mathematiker, und namentlich für den Lehrzweck, eine vorläufige einfachere Darstellung wünschenswerth zu sein, was auch schon vielfach gefühlt worden ist, wie z. B. der schon oben erwähnte Aufsatz des Herrn Director Eschweiler in Cöln, und noch mehr zwei andere ganz neuerlich erschienene, treffliche Mathematiker und Physiker zu Verfassern habende Abhandlungen beweisen. Die eine dieser beiden Abhandlungen rührt von Herrn Crahay in Löwen her, und findet sich in dem „Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XIX. — I<sup>re</sup> Partie. 1852. p. 537.“ unter dem Titel: *Démonstration élémentaire de la vitesse de déviation du plan d'oscillation du pendule, à diverses latitudes; par M. Crahay, Membre de l'Académie*“; die andere, welche unter allen über diesen Gegenstand mir bekannt gewordenen Arbeiten die neueste ist, hat Herrn Pagani in Löwen zum Verfasser, und findet sich in demselben „Bulletin. Tome XIX. — II<sup>e</sup> Partie. p. 161.“ unter dem Titel: „*Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps. Note par M. Pagani, Membre de l'Académie*.“ Herrn Crahay's Darstellung scheint sich der von Herrn Director Eschweiler gebrauchten Darstellung einigermaßen zu nähern, ohne dass ich im Entferntesten die Absicht habe, mich hier auf ein Urtheil über diese Arbeiten einzulassen. Herr Pagani geht auf Euler's Theorem über die Zerlegung der Umdrehungsbewegung eines Körpers zurück, und leitet seinen Aufsatz mit den folgenden Worten ein: „*Les expériences récentes, par lesquelles on a constaté la déclinaison du plan d'oscillation du pendule, ont ramené l'attention des géomètres sur le beau théorème d'Euler, au moyen duquel on peut expliquer assez simplement la loi de cette déclinaison. Mais pour mettre l'explication de ce phénomène à la portée de ceux qui ne sont point familiarisés avec les calculs supérieurs, il manquait à la science une démonstration élémentaire de ce théorème, que l'on doit considérer comme le corrélatif de celui qui porte le nom de parallélogramme des forces, et qui sert aussi à la compo-*

\*) Bis jetzt ist Tome XXVI. erschienen, den ich aber noch nicht gesehen habe.

sition et à la décomposition du mouvement d'un point matériel\*). Hierbei ist zu erwähnen, dass auch Herr Director v. Littrow in Wien in der trefflichen vierten Auflage der „Wunder des Himmels von J. J. v. Littrow. S. 55.“ von welcher bis jetzt die beiden ersten Lieferungen erschienen sind, im Grunde eigentlich das Euler'sche Theorem, auf welches Herr Pagani hinweist, in sehr schöner und wahrhaft populärer, aber doch wissenschaftlicher Weise, zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs benutzt hat, ohne natürlich, dem Zwecke seines Buchs ganz gemäss und entsprechend, dasselbe auf seinen kürzesten mathematischen Ausdruck zu bringen, weshalb wir uns wegen dieser populären Darstellung hier auf das genannte ausgezeichnete Werk, das populär, dabei aber doch ächt wissenschaftlich ist, zu verweisen erlauben, wie wir auch schon im Literarischen Berichte Nr. LXXIV. S. 940. gethan haben.

Wenn wir nun aber auch, wie schon oben erwähnt, die Acten über den Foucault'schen Versuch, namentlich über die beste möglichst elementar-mathematische Darstellung\*\*) der Gründe desselben, noch keineswegs für vollkommen spruchreif, viel weniger für geschlossen erachten, und wenn wir auch zu glauben Ursach haben, dass in dieser Beziehung die Ansichten der Mathematiker und Physiker noch vielfach aus einander gehen, namentlich auch was die geeignetste Darstellung für die Zwecke des mathematischen und physikalischen Unterrichts betrifft: so sind wir, wenn wir die bisherigen literarischen Erscheinungen über den genannten merkwürdigen Versuch betrachten, doch der Meinung, dass jetzt die Zeit gekommen ist, wo das Archiv über denselben nicht mehr schweigen darf. Wir glauben aber am Meisten im Interesse unserer geehrten Leser zu handeln, und am Meisten den Zwecken, welche das Archiv zu erreichen strebt, zu dienen, wenn wir ihnen namentlich die uns bemerkenswerth scheinenden

---

\*) Herr C. Wheatstone in einer in dem Philosophical Magazine, fourth series, Vol. I. p. 572. befindlichen Abhandlung, die man auch in Krönigs Journal für Physik und physikalische Chemie des Auslandes. Band II. Heft 3. S. 358. übersetzt findet, sagt S. 362. auch: „Nach der zuerst von Frisi aufgestellten und durch Euler und Poinsot vollständiger entwickelten Theorie der Drehung kann die Rotationsgeschwindigkeit der Erde als die Resultante von zwei Winkelgeschwindigkeiten betrachtet werden, wo die eine Drehung um die Vertikale des Punktes erfolgt, an welchem sich der Beobachter befindet, und die andere um den Meridian oder die nach Norden und Süden gerichtete Horizontallinie — „(welches Letztere freilich etwas undeutlich und auch nicht ganz richtig ist).“ — Die erstere Componente ist gleich  $n \sin \gamma$  — „(s. unten II. 12) und 12\*)“ — und da die Schwingungsebene an dieser Bewegung nicht Theil nimmt, so bleibt sie in Bezug auf dieselbe in Ruhe, und einen mit jenem Punkte sich bewegenden Beobachter scheint sie deshalb mit derselben Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung sich zu drehen.“

\*\*) Von elementar-mathematischen Darstellungen rede ich in diesem Aufsätze vorzugsweise immer.

elementar-mathematischen Behandlungen dieses Versuchs, insbesondere wenn sie von anerkannten Mathematikern und Physikern herrühren, in möglichst unveränderter und unverkürzter Gestalt nach und nach mittheilen, was von nun an geschehen soll. Dabei bevorworten wir aber ausdrücklich, dass wir uns bei diesen Mittheilungen jeder Kritik enthalten werden, was wir bei diesem Gegenstande, d. h. natürlich hauptsächlich nur in Bezug auf seine möglichst elementare Darstellung, wo „adhuc sub iudice lis est“ für das die Sache am Meisten fördernde Verfahren halten, indem wir auch, hier den „Iudex“ abzugeben, für jetzt wenigstens uns noch nicht herbeilassen wollen und dürfen. Aus diesem Gesichtspunkte bitten wir die Leser die über den Foucault'schen Versuch im Archive von jetzt an erscheinenden, von uns mitgetheilten, Aufsätze aufzufassen, und ihr Urtheil über dieselben sich selbst zu bilden. — Prüfet Alles und das Beste behaltet!

Indem ich nun nach dieser vorläufigen etwas weitläufigen, in diesem Falle aber von mir für nöthig gehaltenen Expectation, mich insbesondere zu dem vorliegenden Aufsätze wende, mit welchem ich die Reihe der Aufsätze über den Foucault'schen Versuch eröffne, so bemerke ich, dass derselbe im Folgenden eine von mir selbst herrührende möglichst elementar gehaltene analytisch-geometrische Darstellung des in dem oben erwähnten Aufsätze von Herrn Pagani in Erinnerung gebrachten Euler'schen Theorems enthalten, und daran einige Bemerkungen über die Art und Weise anschliessen wird, wie man dieses Theorem zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs benutzt hat. Ich gehe daher jetzt sogleich zu der Entwicklung des Euler'schen Theorems in der erwähnten Weise über.

## II.

Wir denken uns einen festen Körper und drei auf einander senkrecht stehende Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , die sich in dem Punkte  $O$  schneiden mögen, der also der Anfang der Coordinaten ist. Diesem Körper werden gleichzeitig um die drei Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  drei Winkelgeschwindigkeiten ertheilt, die wir respective durch  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  bezeichnen wollen, wobei wir unter Winkelgeschwindigkeit den mit der Längeneinheit als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen verstehen, welchen jeder von der betreffenden Drehungsaxe um die Längeneinheit entfernte Punkt des Körpers in der Zeiteinheit beschreibt. Diese Winkelgeschwindigkeiten  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  sollen aber als positiv oder als negativ betrachtet werden, je nachdem ihnen respective um die Axe der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  eine Drehung respective in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der  $y$  an durch den rechten Winkel ( $yz$ ) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der  $z$  hin, in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der  $z$  an durch den rechten Winkel ( $zx$ ) hindurch nach dem positiven Theile der Axe der  $x$  hin, in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der  $x$  an durch den rechten

Winkel  $(xy)$  hindurch nach dem positiven Theile der Axe der  $y$  hin entspricht.

Fassen wir nun einen beliebigen, aber bestimmten Punkt unsers Körpers in's Auge, dessen Coordinaten in Bezug auf die drei Axen respective  $x, y, z$ , sein mögen. Die Entfernung dieses Punktes von der Axe der  $x$  sei  $r_1$ . Dann ist mit gehöriger Rücksicht auf das Vorzeichen der als geradlinig zu betrachtende Weg, welchen in der unendlich kleinen Zeit  $\tau$  der Punkt  $(x, y, z)$  bei der Drehung des Körpers um die Axe der  $x$  vermöge der Winkelgeschwindigkeit  $v_1$  zurücklegen würde, oder die der als Zeiteinheit betrachteten unendlich kleinen Zeit  $\tau$  entsprechende Geschwindigkeit des Punktes  $(x, y, z)$ , offenbar  $r_1 v_1 \tau$ . Bezeichnen wir den spitzen Winkel, unter welchem die auf  $r_1$  senkrecht stehende Richtung der Bewegung des Punktes  $(x, y, z)$  gegen die Ebene der  $xy$  geneigt ist, durch  $\theta_1$ ; so sind, wie mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung aus Taf. II. Fig. I\*, welche eine Darstellung aller möglichen Fälle liefert, auf der Stelle erhellen wird, die Componenten von  $r_1 v_1 \tau$  nach den Axen der  $y$  und  $z$ , mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen,

im 1sten rechten Winkel:

$$-r_1 v_1 \tau \cos \theta_1, +r_1 v_1 \tau \sin \theta_1;$$

im 2ten rechten Winkel:

$$-r_1 v_1 \tau \cos \theta_1, -r_1 v_1 \tau \sin \theta_1;$$

im 3ten rechten Winkel:

$$+r_1 v_1 \tau \cos \theta_1, -r_1 v_1 \tau \sin \theta_1;$$

im 4ten rechten Winkel:

$$+r_1 v_1 \tau \cos \theta_1, +r_1 v_1 \tau \sin \theta_1.$$

Ferner ist aber offenbar

im 1sten rechten Winkel:

$$y = +r_1 \sin \theta_1, z = +r_1 \cos \theta_1;$$

im 2ten rechten Winkel:

$$y = -r_1 \sin \theta_1, z = +r_1 \cos \theta_1;$$

im 3ten rechten Winkel:

$$y = -r_1 \sin \theta_1, z = -r_1 \cos \theta_1;$$

im 4ten rechten Winkel:

$$y = +r_1 \sin \theta_1, z = -r_1 \cos \theta_1.$$



Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergibt sich, dass ganz allgemein die Componenten von  $r_1 v_1 \tau$  nach den Axen der  $y$  und  $z$ , mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-z v_1 \tau \text{ und } +y v_1 \tau$$

sind.

Stellt man eine ähnliche Betrachtung über den Punkt  $(\eta \zeta)$  rücksichtlich der beiden Axen der  $y$  und  $z$  an, und bezeichnet die Entfernungen des Punktes  $(\eta \zeta)$  von diesen zwei Axen respective durch  $r_2$  und  $r_3$ ; so ist aus dem Vorhergehenden klar, dass die Componenten von  $r_2 v_2 \tau$  nach den Axen der  $z$  und  $x$ , mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-x v_2 \tau \text{ und } +z v_2 \tau;$$

die Componenten von  $r_3 v_3 \tau$  nach den Axen der  $x$  und  $y$ , mit gehöriger Rücksicht auf ihre Vorzeichen, respective

$$-y v_3 \tau \text{ und } +x v_3 \tau$$

sind. Also sind offenbar die Geschwindigkeiten des Punktes  $(\eta \zeta)$  nach den drei Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respective:

$$\frac{+z v_2 \tau - y v_3 \tau}{\tau} = z v_2 - y v_3,$$

$$\frac{+x v_3 \tau - z v_1 \tau}{\tau} = x v_3 - z v_1,$$

$$\frac{+y v_1 \tau - x v_2 \tau}{\tau} = y v_1 - x v_2.$$

Mittelst dieser Formeln lassen sich nun die folgenden Fragen leicht beantworten.

Zunächst lässt sich fragen, ob bei der Bewegung unseres Körpers gewisse Punkte desselben in Ruhe bleiben. Soll aber der Punkt  $(\eta \zeta)$  in Ruhe bleiben, so muss, wie auf der Stelle erhellen, zugleich

$$z v_2 - y v_3 = 0, \quad x v_3 - z v_1 = 0, \quad y v_1 - x v_2 = 0;$$

also

$$\frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$$

oder

$$x : y : z = v_1 : v_2 : v_3$$

sein; und man sieht also, dass überhaupt alle die Punkte unsers

**Körpers in Ruhe bleiben, welche in der durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt  $O$  der drei Axen gehenden, durch die Gleichungen**

$$1) \quad \frac{x}{v_1} = \frac{y}{v_2} = \frac{z}{v_3}$$

**charakterisirten geraden Linie liegen, so dass folglich die Bewegung unsers Körpers gerade so vor sich geht, als wenn er sich um die durch diese Gleichungen charakterisirte gerade Linie wie um eine feste Axe drehte.**

**Bezeichnen wir die  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel, welche der eine der beiden Theile dieser durch die Gleichungen 1) charakterisirten Axe, in welche dieselbe durch den Punkt  $O$  getheilt wird, mit den positiven Theilen der Axen der  $x, y, z$  einschliesst, respective durch  $\alpha, \beta, \gamma$ ; so sind nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichungen der in Rede stehenden Axe:**

$$2) \quad \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

**Vergleicht man diese Gleichungen mit den derselben Axe entsprechenden Gleichungen 1), indem man diese beiden Systeme von Gleichungen auf die Formen**

$$y = \frac{v_2}{v_1} x, \quad z = \frac{v_3}{v_1} x$$

**und**

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} x, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} x$$

**bringt; so erhält man auf der Stelle die Gleichungen:**

$$3) \quad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{v_2}{v_1}, \quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{v_3}{v_1}.$$

**Nimmt man nun zu diesen beiden Gleichungen noch die bekannte Gleichung:**

$$4) \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

**so erhält man, mittelst eines hinreichend bekannten Verfahrens, sogleich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen in den folgenden Formeln auf einander:**

$$5) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{v_1'}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ \cos \beta = \pm \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \\ \cos \gamma = \pm \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir die wirkliche Winkelgeschwindigkeit unsers Körpers in Bezug auf seine durch die Gleichungen 1) charakterisirte Drehungsaxe durch  $v$ , die Entfernung des beliebigen Punktes  $(\eta\zeta)$  des Körpers von dieser Drehungsaxe durch  $r$ . und die  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel, welche die Richtung der Bewegung des Punktes  $(\eta\zeta)$  mit den positiven Theilen der Axen der  $x, y, z$  einschliesst, respective durch  $\varphi, \psi, \chi$ ; so ist, wenn  $\tau$  wieder eine unendlich kleine Zeit bezeichnet, nach dem Obigen offenbar:

$$rv\tau \cdot \cos \varphi = (\zeta v_2 - \eta v_3)\tau,$$

$$rv\tau \cdot \cos \psi = (\eta v_3 - \zeta v_1)\tau,$$

$$rv\tau \cdot \cos \chi = (\eta v_1 - \zeta v_2)\tau;$$

also

$$6) \quad \begin{cases} rv \cos \varphi = \zeta v_2 - \eta v_3, \\ rv \cos \psi = \eta v_3 - \zeta v_1, \\ rv \cos \chi = \eta v_1 - \zeta v_2. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \chi = 1,$$

auf der Stelle:

$$7) \quad rv = \sqrt{(\zeta v_2 - \eta v_3)^2 + (\eta v_3 - \zeta v_1)^2 + (\eta v_1 - \zeta v_2)^2}.$$

Weil aber  $r$  das von dem Punkte  $(\eta\zeta)$  auf die durch die Gleichungen 1) charakterisirte Drehungsaxe des Körpers gefällte Perpendikel ist, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$8) \quad r = \frac{\sqrt{(\zeta v_2 - \eta v_3)^2 + (\eta v_3 - \zeta v_1)^2 + (\eta v_1 - \zeta v_2)^2}}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2};$$

also ist nach 7):

$$9) \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Ferner ist nach 6):

$$10) \left\{ \begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\xi v_2 - \eta v_3}{\sqrt{(\xi v_2 - \eta v_3)^2 + (\xi v_3 - \zeta v_1)^2 + (\eta v_1 - \xi v_2)^2}}, \\ \cos\psi &= \frac{\xi v_3 - \zeta v_1}{\sqrt{(\xi v_2 - \eta v_3)^2 + (\xi v_3 - \zeta v_1)^2 + (\eta v_1 - \xi v_2)^2}}, \\ \cos\chi &= \frac{\eta v_1 - \xi v_2}{\sqrt{(\xi v_2 - \eta v_3)^2 + (\xi v_3 - \zeta v_1)^2 + (\eta v_1 - \xi v_2)^2}}. \end{aligned} \right.$$

In den vorhergehenden Formeln ist das Theorem von Euler enthalten, welches man in möglichster Kürze auf folgende Art aussprechen kann:

### Lehrsatz.

Wenn einem Körper um drei in einem gemeinschaftlichen Punkte  $O$  sich rechtwinkig durchschneidende Axen gleichzeitig drei Winkelgeschwindigkeiten  $v_1, v_2, v_3$  ertheilt werden, so dreht sich derselbe mit der Winkelgeschwindigkeit  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$  um eine durch den Punkt  $O$  gehende mittlere Axe, deren Lage gegen die drei ersten Axen durch die der Proportion

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = v_1 : v_2 : v_3$$

genügenden Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  bestimmt wird\*).

Warum Herr Pagani dieses Theorem „le corrélatif de celui, qui porte le nom de *parallélogramme des forces*“\*\*) nennen konnte, erhellet jedem Kundigen nun gewiss auf der Stelle, und bedarf einer weiteren Erläuterung hier nicht. Man kann mittelst dieses Theorems allerdings drei drehende Bewegungen eines Körpers um drei senkrecht auf einander stehende Axen in eine drehende Bewegung um eine mittlere Axe zusammensetzen, und auch sowohl die Lage dieser mittleren Axe gegen die drei ersten Axen, als auch die Winkelgeschwindigkeit der mittleren Bewegung aus den gegebenen Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungen um die drei sich rechtwinklig durchschnei-

\*) So findet sich der Satz z. B. ausgedrückt in dem zwar älteren, aber immer noch sehr empfehlenswerthen System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Von J. J. A. Ide. Zweiter Theil. Berlin. 1802. S. 324. §. 290. Auf neuere Lehrbücher der Mechanik will ich absichtlich nicht weiter verweisen.

\*\*) Oder vielmehr noch allgemeiner le corrélatif de celui, qui porte le nom de *parallélépipède des forces*.

denden Axen leicht bestimmen. Eben so kann man aber nun natürlich auch umgekehrt eine drehende Bewegung um eine Axe in drei drehende Bewegungen um drei sich in einem Punkte dieser Axe rechtwinklig durchschneidende Axen zerlegen, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen wird.

Wir wollen, unserm eigentlichen Zwecke jetzt näher tretend, hier nur noch den folgenden besonderen Fall etwas genauer betrachten. In Taf. II. Fig. II\*. sei der um  $O$  als Mittelpunkt in der Ebene des Papiers beschriebene Kreis ein Meridian der als eine Kugel betrachteten Erde, deren Halbmesser wir durch  $r$  bezeichnen wollen. Der Durchschnitt der Ebene des Erdäquators mit der Ebene dieses Meridians sei  $AB$ , die Erdaxe, um welche die Erde sich dreht, sei  $PQ$ , und  $P$  sei der Nordpol,  $Q$  dagegen sei der Südpol der Erde. Ein unter dem in Rede stehenden Meridiane in der nördlichen Hälfte der Erdoberfläche liegender Ort, dessen geographische Breite wir durch  $L$  bezeichnen wollen, sei  $M$ , so dass also  $Ox$  die Vertikale dieses Orts ist; die Mittagslinie desselben sei  $NS$ , und  $Oy$  sei durch den Mittelpunkt  $O$  der Erde mit  $NS$  parallel gezogen. Die Linien  $Ox$  und  $Oy$  wollen wir als die positiven Theile der Axen der  $x$  und  $y$  eines durch den Mittelpunkt  $O$  der Erde als Anfang gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems der  $xyz$  annehmen, dessen dritte Axe der  $z$  in dem Mittelpunkte  $O$  der Erde auf der Ebene des Meridians des Orts  $M$  senkrecht steht, und wollen nun nach dem Euler'schen Theorem die Rotationsbewegung der Erde um die Erdaxe  $PQ$  in drei Bewegungen um die Axen der  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zu zerlegen, oder jene eine Bewegung durch diese drei Bewegungen zu ersetzen suchen, wobei wir uns der im Vorhergehenden entwickelten Formeln bedienen, und allen dort gebrauchten Symbolen ihre frühere Bedeutung lassen, indem die Coordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sich jetzt auf den Punkt  $M$ , dessen geographische Breite  $L$  ist, beziehen.

Wenn wir, was nach dem Obigen offenbar verstatet ist, die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  jetzt dem nach dem Nordpole  $P$  der Erde gerichteten Theile  $OP$  der Erdaxe entsprechen lassen, so ist offenbar:

$$\alpha = 90^\circ - L, \quad \beta = L, \quad \gamma = 90^\circ;$$

also:

$$\cos \alpha = \sin L, \quad \cos \beta = \cos L, \quad \cos \gamma = 0;$$

folglich nach 5):

$$\sin L = \frac{r_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}},$$

$$\cos L = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}},$$

$$0 = \frac{r_3}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}}.$$

Weil  $\sin L$  und  $\cos L$  beide positiv sind, und in diesen Formeln sich bekanntlich die oberen und unteren Zeichen auf einander beziehen, so haben  $v_1$  und  $v_2$  offenbar gleiche Vorzeichen, und man muss in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nehmen, je nachdem  $v_1$  und  $v_2$  beide positiv oder beide negativ sind. Aus der dritten der drei vorhergehenden Gleichungen folgt  $v_3=0$ , eine Bewegung um die Axe der  $z$  findet also nicht Statt, und mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen wie vorher ist:

$$\sin L = \pm \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}, \quad \cos L = \pm \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}};$$

also, weil nach 9)

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2};$$

ist:

$$11) \quad v_1 = \pm v \sin L, \quad v_2 = \pm v \cos L;$$

immer mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen wie vorher.

Offenbar ist im vorliegenden Falle

$$\xi = r, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Also ist nach 10), wenn man beachtet, dass auch  $v_3=0$  ist:

$$\cos \varphi = 0, \quad \cos \psi = 0, \quad \cos \chi = - \frac{rv_2}{\sqrt{r^2 v_2^2}}$$

oder

$$\cos \varphi = 0, \quad \cos \psi = 0, \quad \cos \chi = - \frac{v_2}{\sqrt{v_2^2}}.$$

Ist nun in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe  $\chi=0$  zu setzen, so ist, wie uns die dritte der drei vorstehenden Gleichungen zeigt,  $v_2$  negativ, da  $\cos \chi$  positiv ist. Also muss man nach dem Obigen in diesem Falle in den Formeln 11) die unteren Zeichen nehmen, folglich

$$12) \quad v_1 = -v \sin L, \quad v_2 = -v \cos L$$

setzen.

Ist dagegen in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe  $\chi=180^\circ$  zu setzen, so ist, wie uns die dritte der drei in Rede stehenden obigen Gleichungen zeigt,  $v_2$  positiv, da  $\cos \chi$  negativ ist. Also muss man nach dem Obigen in diesem Falle in den Formeln 11) die oberen Zeichen nehmen, und daher

$$12^*) \quad v_1 = v \sin L, \quad v_2 = v \cos L$$

setzen.

Ob man in Folge der Richtung der Bewegung der Erde um ihre Axe  $\chi=0$  oder  $\chi=180^\circ$  zu setzen hat, hängt natürlich von der Annahme des positiven Theils der Axe der  $z$  ab, worüber im Vorhergehenden nichts festgesetzt worden ist, und nichts festgesetzt zu werden brauchte. Bei der Anwendung der obigen Regeln muss man sich aber den positiven Theil der Axe der  $z$  immer in einer bestimmten Weise angenommen denken, worüber ein Jeder die ihm selbst am Meisten zusagende Bestimmung festsetzen mag.

Im Allgemeinen sieht man aus dem Vorhergehenden, dass man sich die Bewegung der Erde um ihre Axe immer durch zwei Bewegungen, die eine um die Vertikale  $Ox$  des beliebigen Orts  $M$ , die andere um die durch den Mittelpunkt der Erde mit seiner Mittagslinie gezogene Parallele  $Oy$ , ersetzt denken kann. Die näheren Umstände dieser beiden Bewegungen werden durch die obigen Formeln bestimmt.

### III.

Zur Erklärung des Foucault'schen Versuchs hat man nun das Eulersche Theorem auf folgende Art benutzt, wobei ich im Allgemeinen der von Herrn Director v. Littrow a. a. O. gegebenen Darstellung folge, natürlich mit Weglassung alles Dessen, was Herr v. Littrow dort in sinnreicher Weise zur möglichst populären, aber doch wissenschaftlich gehaltenen, Erläuterung des Eulerschen Theorems selbst beigebracht hat, da es mir ja jetzt nur noch auf dessen Anwendung zur Erläuterung des merkwürdigen Foucault'schen Versuchs ankommen kann, nachdem ich vorher einen möglichst elementaren analytischen Beweis des genannten Theorems zu geben versucht habe.

Wir denken uns zuerst einen Beobachter in einem der beiden Erdpole, grösserer Bestimmtheit wegen etwa in dem Nordpole, und das Pendel so aufgehängt, dass sein Aufhängepunkt in der Verlängerung der Erdaxe über den Nordpol hinaus liegt, aber an der Bewegung der Erde um ihre Axe nicht Theil nehmen kann. Unter diesen Voraussetzungen wird nun natürlich, auch wenn sich die Erde um ihre Axe dreht, die Schwingungsebene des Pendels eine unveränderliche Lage im Raume behalten; dem Beobachter aber auf der um ihre Axe sich drehenden Erde, der von der Bewegung der Erde nichts fühlt und dieselbe als ruhend voraussetzt, muss die Schwingungsebene des Pendels sich nothwendig um seine eigne Vertikale mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie die Erde um ihre Axe, nach einer der Richtung der Bewegung der letzteren entgegengesetzten Richtung hin, zu drehen scheinen. So stellt unter den gemachten Voraussetzungen das Phänomen unter einem der beiden Erdpole in der allerein-

fachsten Weise sich dar. Nehmen wir nun aber für irgend einen anderen Punkt auf der Erdoberfläche, grösserer Bestimmtheit wegen in der nördlichen Hälfte der Erde, dessen geographische Breite  $L$  ist, das Euler'sche Theorem zu Hülfe, so ist klar, dass die Sache im Allgemeinen und im Wesentlichen für jeden Punkt auf der Erdoberfläche ganz dieselbe ist und bleibt wie für die beiden Erdpole. Nur ist die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der Schwingungsebene des Pendels jetzt nicht mehr wie vorher der ganzen Winkelgeschwindigkeit der Erde bei ihrer Axendrehung gleich, sondern, wenn jene durch  $v_1$ , letztere durch  $v$  bezeichnet wird, so ist nach dem Euler'schen Theorem der absolute Werth von  $v_1$  gleich  $v \sin L$ , d. h. man muss die Winkelgeschwindigkeit der Axendrehung der Erde mit dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsorts multipliciren, um den absoluten Werth von  $v_1$  zu finden. Was die Richtung der scheinbaren Bewegung der Schwingungsebene betrifft, so lässt sich dieselbe nach den oben von mir gegebenen Regeln auf die einfachste und sicherste Weise bestimmen. Ist nämlich in Folge der Bewegung der Erde um ihre Axe  $\chi = 0$  zu setzen, so ist  $v_1$  negativ; ist dagegen in Folge der Bewegung der Erde um ihre Axe  $\chi = 180^\circ$  zu setzen, so ist  $v_1$  positiv. Für den Mathematiker bedarf die Anwendung dieser ganz bestimmten Regeln keiner weiteren Erläuterung, und ein Jeder wird, wenn er die Anwendung dieser Regeln nur einmal versucht, sogleich übersehen, dass auch in Beziehung auf die Richtung der scheinbaren Bewegung der Schwingungsebene des Pendels Alles auf jedem Punkte der Erdoberfläche im Allgemeinen und Wesentlichen ganz eben so vor sich geht wie wir oben unter den Polen gesehen haben.

Alles Obige beruhte nun aber lediglich auf der Annahme, dass das Pendel so aufgehängt sei, dass sein Aufhängepunkt an der Bewegung der Erde selbst gar nicht Theil nehme, eine Forderung, die natürlich in der Wirklichkeit niemals erfüllt werden kann. Nun haben aber von Foucault wirklich angestellte Versuche gezeigt, was wir nicht für das geringste Verdienst derselben von ihrer praktischen Seite halten, dass, wenn nur der Pendelfaden rund und homogen ist, man ihn beliebig rasch um sich selbst drehen lassen kann, ohne dadurch einen wesentlichen Einfluss auf die Lage der Schwingungsebene auszuüben, so dass das Experiment an jedem beliebigen Beobachtungsorte gelingen muss. Ueber das bei den Versuchen anzuwendende praktische Verfahren erlaube ich mir im Interesse der Leser des Archivs im Folgenden Herrn v. Littrow sprechen zu lassen.

„Foucault hat in dem höchsten Punkte eines Gewölbes ein starkes Metallstück angebracht, welches als Aufhängepunkt für den Pendelfaden dienen sollte. Dieser geht durch eine kleine Platte von gehärtetem Stahl, deren freie Oberfläche genau horizontal ist. Der Pendelfaden selbst ist von Eisendraht, sein Durchmesser im Mittel  $\frac{8}{10}$  Millimeter und seine Länge 2 Meter. Am unteren Ende trägt er eine polirte Messingkugel von 5 Kilogrammen Gewicht, nach unten mit einer Spitze versehen, die gewissermassen die Verlängerung des Pendelfadens ist.“



Will man an das Experiment gehen, so wird man zuerst die etwaige Torsion des Fadens, so wie die drehenden Oscillationen der Kugel wegzubringen suchen. Um dann das Pendel aus der Gleichgewichtslage herauszubringen, umfasst man die Kugel mit einer Schlinge aus Bindfaden, dessen anderes Ende an einem Punkte der Mauer in einer geringen Höhe über dem Boden befestigt ist. Giebt man dem Faden die gehörige Länge, so wird man die Amplitude der Schwingungen des Pendels nach Belieben abändern können. Bei Foucault's Experimente umfassten die Schwingungen in der Regel Anfangs einen Bogen von 15 bis 20 Graden. Hat man also mit Hülfe des Fadens und der Schlinge das Pendel aus der vertikalen Lage entfernt, und ist die Kugel zur Ruhe gekommen, so brennt man den Faden ab, wodurch die Schlinge zur Erde fällt, und das Pendel sich in Bewegung setzt. Nach einer halben Stunde ist der Betrag der Drehung in unsern Breiten schon  $5^{\circ}.39'$ , so dass diese deutlich in die Augen fällt. Um sich zu überzeugen, ob diese Drehung wirklich mit Continuität vor sich geht, wie es sein soll, kann man sich eines vertikalen Stiftes bedienen, den man so aufstellt, dass die nach abwärts gerichtete Spitze an der Kugel des Pendels bei der grössten Ausweichung desselben von der Gleichgewichtslage jenen Stift fast berührt. In weniger als einer Minute findet das genaue Zusammentreffen beider Spitzen nicht mehr Statt; die Spitze an der Pendelkugel weicht auf der dem Beobachter zugekehrten Seite der Schwingung immer mehr gegen die Linke des Beobachters ab, was darauf hindeutet, dass die Drehung der Schwingungsebene im Sinne von Süd gegen West u. s. w. erfolgt, wie es auch sein soll. Die mittlere Grösse jener Drehung, mit Rücksicht auf die Zeit, zeigt übereinstimmend mit der Theorie, dass die Schwingungsebene unter der geographischen Breite von Paris in 24 Stunden einen Winkel von  $271^{\circ}$  zurücklegt\*). Foucault hat später das Experiment im Saale des Pariser Observatoriums mit einem

---

\*) Für Paris ist

$$L = 48^{\circ}.50'.13''$$

also

$$\log \sin L = 0.8767024 - 1.$$

Nun kann man für die Axendrehung der Erde, wenn man 24 Stunden als Zeiteinheit annimmt,  $r = 360^{\circ}$ , also

$$\log r = 2.5563025$$

setzen. Daher ist für Paris der Logarithmus des absoluten Werths von  $r_1$

$$\begin{aligned} &= 0.8767024 - 1 \\ &\quad + 2.5563025 \\ &= 2.4330049 \end{aligned}$$

welches den absoluten Werth von  $r_1 = 271^{\circ}.02$  giebt.

Pendel von 11 Meter Länge, ausgeführt, wo sich schon nach 10 Schwingungen eine Ablenkung der Schwingungsebene erkennen liess.“

Herr v. Littrow bemerkt noch, dass man schon im J. 1661 in Florenz bei Gelegenheit von Pendelversuchen die besprochene Ablenkung der Schwingungsebene beobachtet ohne jedoch eine Erklärung davon zu geben.

Was etwa noch weiter über das bei den Versuchen zu beachtende praktische Verfahren zu bemerken sein möchte, werde die Leser in den späteren im Archive mitzutheilenden Aufsätzen finden. In den Münchener Gelehrten Anzeigen. 1830. Nr. 30. 31. finden sich verschiedene hierher gehörende beachtenswerthe Bemerkungen, insbesondere auch von Herrn Conservator Lamont, der sich mit diesem Versuch mehrfach praktisch beschäftigt hat.

Schliesslich bemerke ich, dass der Foucault'sche Versuch natürlich auch ein ganz neues Mittel zur Bestimmung der geographischen Breite an die Hand giebt, und, so viel ich gewiss habe, beschäftigt man sich auch schon mit der Construction dienender Apparate. Aber auch diese Anwendung wird eine in das kleinste Detail gehende Entwicklung der Theorie des genannten schönen Versuchs voraussetzen, wenn sie wirklich fruchtbar werden soll.

---

Unter dem Aequator lässt sich der Versuch gar nicht mehr anstellen, da dort  $\varphi_1 = 0$  ist. Ueberhaupt wird derselbe desto unsicherer, desto weniger anschaulich, je mehr man sich dem Aequator nähert. Je näher am Pol, desto besser.

---

## VI.

# Apparat zu Inductionsversuchen mit der Nebenbatterie.

Von

Herrn Director Knochenhauer  
zu Meiningen.

Die neuen Versuche über die Inductionerscheinungen an der Nebenbatterie, die ich im vergangenen Sommer angestellt habe und demnächst publiciren werde, haben mich die Bedingungen kennen gelehrt, unter welchen diese Inductionen am stärksten hervortreten und mit der Entfernung der Inductordrähte am langsamsten abnehmen. Diese Bedingungen sind: lange, gut leitende Inductordrähte, kurzer Schliessungsdraht der Hauptbatterie, Flaschen von sehr starkem Glase, sorgfältige Verbindung der Drähte mit den Belegungen der Flaschen. Für diejenigen demnach, die diese Erscheinungen nur auf eine bequeme Weise sehen, aber keine strengen Messungen anstellen wollen, erlaube ich mir den folgenden Apparat zu beschreiben, der ihren Wünschen entsprechen wird. — Zum Ausspannen der Inductordrähte verwende man zwei hölzerne, zerlegbare Rahmen, wie einen Taf. II. Fig. 1. darstellt; die Seitenwangen *AC* und *BD* seien 10' hoch, aus 4 Zoll breiten,  $\frac{3}{8}$  Zoll starken tannenen Brettchen bestehend, gegen welche nach aussen drei  $1\frac{1}{2}$  Zoll breite,  $\frac{3}{8}$  Zoll starke Latten in gleichen Abständen von einander mit den hohen Kanten geleimt und mit Stiften befestigt sind; die 8' langen Querstäbe *NM* und *OL*, von denen der unterste 2' über *C* und *D* steht, bilden 2 Zoll breite,  $\frac{3}{8}$  Zoll starke Latten, gegen deren Mitte man andere  $1\frac{1}{2}$  Zoll breite wie vorher befestigt. Die beiden Querstäbe enden mit 2 Zoll im Quadrat starken Klützen *E*,

*F, G, H*, die in Holzschrauben übergehen; man legt den oberen Stab in einen kurzen Schlitz zwischen den beiden vordern Querleisten auf den Wangen *AC* und *BD*, den untern durch einen längern Schlitz zwischen denselben Querleisten, und zieht die Schraubmutter *u* an. In den Klötzen *E, F, G, H* stecken starke etwa um 2 Zoll nach vorn hervorragende Glaspflöcke, zwei der gleichen etwas kürzere in den 2' von einander abstehenden Holzklötzen *J* und *K*. Die zwei letzten haben vorn eine Messingfassung *A* (Taf. II Fig. 2.), gegen welche die mit Plättchen endigenden Drähte *C* und *D* sich mittelst der Druckschraube *B* festklemmen lassen; die andern 4 Glaspflöcke sind vorn mit einigen gefirnisssten Fäden umwickelt. Die 30' langen Inductordrähte von etwa  $\frac{3}{4}$  Linien starkem, ausgeglühtem Kupferdraht werden mit ihren Enden bei *J* und *K* festgeklemmt, über die Glaspflöcke gelegt und darauf durch Herabdrücken von *GH* mässig stark angespannt. — Flaschen wird man 4 gebrauchen; man lasse sie zu  $1\frac{1}{4}$  bis  $1\frac{1}{2}$  Quadr-Fuss äusserer Belegung aus sehr dickem, etwa 3 Linien starkem Glase mit senkrechten Wänden wie *ABCD* (Taf. II. Fig. 3) anfertigen, und einen kurzen Messingstab auf dem Boden einer jeden mit der Belegung durch Ankitten und Ueberkleben sicher metallisch verbinden; die Druckschraube *F* dient dann zur Befestigung des Schliessungsdrahts *FGH*. Mit einer Flasche der Nebenbatterie verbindet man den Funkenmesser *NM*; in ihm laufen zwei Messingstäbe *NP* und *MQR* auf 4 Zoll Distanz neben einander und werden durch die in Hülsen fest eingekittete Glasshule *JK* getrennt; etwa 4 Zoll über *JK* trägt der eine Stab die Kugel *N*, der andere an einer Schraube *L* die Kugel *U*, beide mindestens von  $\frac{3}{4}$  Zoll Durchmesser. Die Schraubmutter zu *L* ist durchschnitten, um sie mit der Schraube *O* fest anzuziehen. Der innere Messingstab drückt mit der Platte *P* gegen die innere Belegung, durch den äussern geht die Schraube *Q*, welche die an einen Draht gelöthete Platte *W* an die äussere Belegung andrückt. Um den Stand dieses Funkenmessers sicherer zu machen, greift das obere Ende des Stabes *LQ* in die Hülse bei *R* ein. Wenn sich zwei Flaschen in der Nebenbatterie befinden, so wird die zweite mit einem ähnlichen Apparat armirt, dem nur die Kugeln *MN* und der Fortsatz *QR* fehlen; man verbindet sie durch Drähte, die zu den Klemmschrauben *J* und *K* führen; natürlich so, dass die beiden innern und ebenso die beiden äussern Stäbe mit einander zusammenkommen. Die Nebenbatterie steht am besten isolirt auf einer Glastafel *V*, an die unten 4 Standgläser (*T, U...*) gekittet sind. Da fürs Maximum der Induction bei unverändertem Schliessungsdraht der Hauptbatterie die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie durch Probiren ermittelt werden muss (denn starke Flaschen sind selten an Kraft einander gleich), so ist es bequem zwei an Glasshulen befestigte Klemmen *H* und *S* anzubringen, die erste verbunden mit dem Draht zur innern Belegung *HGF*, der bei zwei zur Nebenbatterie combinirten Flaschen sich bei *G* spaltet die andere verbunden mit der Hülse *R* und einem längern Metallstreifen, auf welchen die eine oder beide Flaschen gesetzt werden. — Von der nicht isolirten Hauptbatterie, die durch Zuleitung der Elektrizität auf einem einige Fuss langen Draht geladen wird, führt der

mit der innern Belegung verbundene Schliessungsdraht (überall der gleiche  $\frac{3}{4}$  Linien starke Kupferdraht) zur Klemmschraube *D* (Taf. II. Fig. 4.) des Ausladers *ABFG*; in diesem sind die beiden Kugeln *A* und *B*, diese fest, jene durch die Schraube *C* verstellbar, auf die gläsernen Säulen *F* und *G* gekittet und zur Sicherung ihres Standes durch den gläsernen Querstab *ED* gestützt.

Bei den Versuchen möge zuerst jede der beiden Batterien 2 Flaschen enthalten. Man stellt die Rahmen *AB* und *CD* (Taf. II. Fig. 5.) parallel zu einander um etwa 2' getrennt auf; die Hauptbatterie *J* erhält vom Conductor *K* ihre Ladung; ihr Schliessungsdraht führt zur Klemmschraube *D* (Taf. II. Fig. 4.) oder zu den Kugeln *L* des Ausladers, von da nämlich von der Klemmschraube *E* (Taf. II. Fig. 4.) in einer horizontalen Drahtlänge von 3' nach *M* (der Schraube *K* Taf. II. Fig. 1.), geht durch den Inductordraht bis *N* und von hier in etwa 4' zur äussern Belegung. Von den Schrauben *V* und *W* (*J*, *K*, Taf. II. Fig. 1.) des zweiten Rahmens laufen die etwa 8' langen Kupferdrähte *VS* und *WU* horizontal aus, die bei *R* und *Q* durch die Klemmschrauben (*H*, *S* Taf. II. Fig. 3.) hindurchgehen und fest gefasst werden. Man schraubt nun die Kugeln *M* und *N* (Taf. II. Fig. 3.) des Funkenmessers nach und nach so nahe an einander, bis zwischen ihnen in dem Moment, wo sich die Hauptbatterie über *L* entladet, der Inductionsfunken erscheint. Hierauf rückt man die Nebenbatterie *P* näher oder weiter vom Rahmen *AB*, indem man die Drahtlänge *VR* und *WQ* verkürzt oder verlängert, bis man bei unverändertem Stand der Kugeln *L* den ersten Funken zwischen *N* und *M* erhält. Ist die Länge des Schliessungsdrahts der Nebenbatterie für das Maximum der Induction auf diese Weise festgestellt, so kann man die Rahmen näher an einander bringen und nach und nach wieder von einander entfernen; dies zeigt die allmähliche Abnahme der inducirten Ladung der Nebenbatterie, und man wird sicher die Rahmen bis auf 4' aus einander rücken müssen, ehe die Länge des inducirten Funkens bis auf  $\frac{1}{2}$  Linie herabkommt, sofern die Distanz zwischen den Kugeln des Ausladers gegen 2 Linien beträgt. — Will man sich ferner von dem Gesetze überzeugen, dass die Längen der beiden Schliessungsdrähte sich umgekehrt wie die Zahl der Flaschen in beiden Batterien verhalten, so lasse man die Hauptbatterie aus 2 Flaschen bestehen und setze in die Nebenbatterie nur eine; man wird dann hier, wo der Schliessungsdraht der Hauptbatterie ungefähr 38' lang ist, jeden der Drähte *VR* und *WQ* noch etwa um 19' zu verlängern haben, ehe die Nebenbatterie das Maximum ihrer Ladung erlangt. Eine kleine Störung tritt dadurch ein, dass die Drähte *VS* und *WU* einander zu nahe sind; indess lässt sich das Gesetz deshalb doch nicht verkennen. Auch kann man 3 Flaschen in die Hauptbatterie nehmen und den Nebendraht bis zum Maximum der Induction noch um etwa 38' verlängern. In den beiden letzten Zusammenstellungen der Batterien hat man die überraschende Erscheinung, dass bei kleinen Distanzen der Inductordrähte von einander (1 bis 2 Zoll) der Funke über *NM* (Taf. II. Fig. 3.) länger ist als der über *L* (Taf. II. Fig. 5.) und viel stärker schallt.

Endlich ist ebenfalls aus den Eigenschaften der Ellipse bekannt, dass

$$\frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega,$$

mithin ist auch

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \dots\dots\dots 2)$$

Aus 1) und 2) folgt aber, dass  $y=b$  und  $x=a$  sei, was in Beziehung auf die Grösse dieser Linien zu beweisen war. Aus der Konstruktion selbst geht aber hervor, dass diese Linien einander senkrecht stehen; mithin haben sie auch unter sich erforderliche Lage.

### Druckfehler.

In Theil XIX. S. 441. Z. 3. muss die Gleichung 30) heissen:

$$= -\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \lg 2 - \frac{(2^1-1)\alpha B_1}{1.1.2} + \frac{(2^3-1)\alpha^3 B_3}{3.1.2.3.4} - \frac{(2^5-1)\alpha^5 B_5}{5.1.2..6} + \dots$$

und auf derselben Seite Z. 11. und 12. muss die Gleichung 31) heissen:

$$= -\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \lg \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{(2^1-1)\alpha B_1}{1.1.2} + \frac{(2^3-1)\alpha^3 B_3}{3.1.2.3.4} - \frac{(2^5-1)\alpha^5 B_5}{5.1.2..6} + \dots$$



possum, quin mirer, me id nusquam reperire potuisse. Quod si Tu, qui doctrina rerumque cognitione me millies superas, hoc problema antea vidisti, oro, ut id supprimas. Problemata tertium et quartum melius forsitan ac rectius „Uebungsaufgaben für Schüler“ apellantur, quamquam in utroque est, quod initio expectandum non videatur.

Posteriores Archivi Tui tomos, perlegens quaedam animadverti, quae et ad Te et ad me pertinent. In tom. XVI. pagg. 424. seqq. D<sup>n</sup>s Scheffler Brunsvicensis solutionem problematis Malfattini dedit, quae a Tua in suppl. Lexici Klügeliani (Pars prior. pag. 29. seqq.) vix et ne vix quidem differat. In tom. XVIII. pag. 39. seqq. Doctor Werner theorema de differentiatione sub signo  $\int$  repetita proposuit, quod a me quattuor fere abhinc annis in dissertatione pro munere Lectoris propositum est posteaque usurpatum in tractatu, cui Regia Academia Scient. Holmiensis in Actis suis locum dare dignata est. Rogo Te ut opuscula, epistolam sequentia tamquam documentum hujus rei accipias. Si in Archivum mentionem hujus rei facere Tibi placuerit, gratissimum mihi erit. Fortasse num venit Tibi in mentem Horatianum illud:

„Multi rixantur de lana saepe caprina“

sed memineris, cum, qui non multum habet, nihil sine damno perdere meque, nulla ratione divitem, hac esse pauperrimum.

hanc erratorum in tractatulo de  $\int^x \frac{\sin^n x}{x^m} dx$  adjeci. Valeas.“

Was die von Herrn Lindman in diesem Briefe mir gemachten Mittheilungen betrifft, so erlaube ich mir zuerst zu bemerken, dass ich allerdings recht gut wusste, dass die von Herrn Scheffler in Braunschweig in Thl. XVI. S. 424. gegebene Auflösung des Malfatti'schen Problems mit meiner eignen Auflösung in den Supplementen zum Klügel'schen Wörterbuche. Thl. I. S. 29. im Wesentlichen übereinstimmt. Ich bin aber eben so sehr überzeugt, dass Herr Scheffler diese Auflösung ganz selbstständig gefunden hat, und meine eigne Auflösung gar nicht gekannt hat. Einestheils deshalb, anderntheils aber auch, um diese Auflösung bekannter zu machen, liess ich Herrn Scheffler's Aufsatz im Archiv a. a. O. abdrucken, ohne das zu bemerken, worauf mich jetzt Herr Lindman aufmerksam macht. Herr Scheffler wird mir das nicht übel nehmen, indem es ihm, wie ich wenigstens hoffe, wohl nicht geradezu unangenehm sein wird, bei einer kleinen wissenschaftlichen Untersuchung mit mir zusammengetroffen zu sein.

Ferner bemerke ich, dass das von Herrn Werner in Theil XVIII. Nr. IV. S. 39. gegebene Theorem allerdings schon früher von Herrn Lindman gefunden worden ist, wie aus den beiden folgenden mir mit obigem Briefe gütigst übersandten Schriften deutlich <sup>1</sup> vorgeht:

Theses quas pro munere Lectoris publicae censurae modeste subicit Mag. C. F. Lindman, Ad Reg. Acad. Ups. Docens. Upsaliae. 1848. 4.

Om några definita integraler; af C. F. Lindman, Jön-  
lemnad d. 31. Januarii 1851.

(Aus den Schriften der Stockholmer Akademie der Wissen-  
schaften.)

Leider habe ich diese beiden Schriften nur erst jetzt kennen-  
gelernt, indem Herr Lindman dieselben mir gütigst übersandt-  
hat; hätte ich früher von denselben Kenntniss gehabt, so würde  
ich natürlich bei dem Aufsatze des Herrn Werner bemerkt  
haben, dass Herr Lindman die betreffenden Sätze schon  
früher gefunden habe, welche Schuld Herrn Lindman nun nach-  
träglich abtragen zu können, mir zur grössten Freude gereicht.

G.

In seinen „Grösstentheils neuen Aufgaben aus dem  
Gebiete der Géométrie descriptive. Zürich. 1845.“  
die wir als sehr empfehlenswerth den Lesern des Archivs bei  
dieser Gelegenheit wieder in Erinnerung bringen, theilt Herr Professor  
L. Mosbrugger in Aarau auf S. 123. folgende, ihm selbst  
von Herrn Professor Rytz in Aarau mitgetheilte Construction  
der Achsen der Ellipse aus zwei gegebenen conjugirten Durch-  
messern mit, für welche der analytische Beweis von Herrn  
Mosbrugger selbst herrührt.

Es seien Taf. I. Fig. 6.  $Am$  und  $Bm$  die der Lage und Grösse  
nach gegebenen zugeordneten Durchmesser. Wir errichten im  
Durchschnitt  $m$  beider Durchmesser auf den grössern  $Am$  ein  
Perpendikel  $mD \perp Am$ , verbinden  $D$  mit  $B$  durch die Linie  $BD$ ,  
halbiren  $BD$  in  $M$  und beschreiben aus  $M$  mit der Entfernung  
 $Mm$  einen Halbkreis, welcher die Linie  $BD$  in zwei Punkten  $E$   
und  $F$  schneiden wird; ziehen endlich durch  $m$  und  $E$ ,  $m$  und  $F$   
die Linien  $mEHG$ ,  $mFLN$ , so dass  $mL \perp DF$  und  $mH \perp BF$   
ist, so sind  $mL$  die halbe grosse und  $mH$  die halbe kleine Achse  
der Ellipse in ihren erforderlichen Grössen und Lagen. Die De-  
duktion dieser Construction ist folgende:

Es ist zu zeigen, dass  $DF = a$  und  $BF = b$  ist, wenn  $2a$  und  
 $2b$  die grosse und kleine Achse der Ellipse bezeichnen. Es seien  
daher  $Am = f$ ,  $Bm = g$ ,  $\angle NmK = \angle AML = \varphi$ ,  $\angle LmB = w$ ,  
 $DF = x$ ,  $BF = y$ , so ist:



$$(x+y)^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos[90^\circ + (\varphi + w)]$$

oder

$$(x+y)^2 = f^2 + g^2 + 2fg \sin(\varphi + w).$$

Da aber nach den Eigenschaften der Ellipse

$$a^2 + b^2 = f^2 + g^2, \quad ab = fg \sin(\varphi + w)$$

ist, so folgt sogleich, dass

$$(x+y)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

also

$$x + y = a + b \dots\dots\dots 1)$$

ist. Ferner ist in den Dreiecken  $FmB$  und  $FmD$

$$y : g = \sin w : \sin BFC$$

$$\begin{cases} x : f = \sin(90^\circ + \varphi) : \sin(180^\circ - BFC) \\ x : f = \cos \varphi : \sin BFC \end{cases}$$

mithin

$$\sin BFC = \frac{g}{y} \sin w, \quad \text{und} \quad \sin BFC = \frac{f}{x} \cos \varphi;$$

folglich

$$\frac{y}{x} = \frac{g \sin w}{f \cos \varphi}, \quad \text{oder auch} \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{g^2 \sin^2 w}{f^2 \cos^2 \varphi};$$

nun ist aber nach den Eigenschaften der Ellipse:

$$\frac{g^2}{f^2} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin w \cos w},$$

daher wird auch:

$$\frac{y^2}{x^2} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} w.$$

und folglich für  $\alpha=0$ :

$$10) \quad e^{\beta\sqrt{-1}} = \cos\beta + \sin\beta\sqrt{-1}.$$

Also ist, wenn wir  $\beta = \pm x$  setzen:

$$11) \quad e^{\pm x\sqrt{-1}} = \cos x \pm \sin x\sqrt{-1}.$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x - \sin x\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}}$$

erhält man:

$$12) \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Also ist

$$13) \quad \begin{cases} \text{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}, \\ \cot x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} \sqrt{-1}; \end{cases}$$

oder

$$14) \quad \begin{cases} \text{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \sqrt{-1}, \\ \cot x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}} \sqrt{-1}; \end{cases}$$

oder

$$15) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{(e^{2x\sqrt{-1}} + 1)\sqrt{-1}}, \\ \cot x = \frac{1 + e^{2x\sqrt{-1}}}{(1 - e^{2x\sqrt{-1}})\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

oder auch

$$16) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} x = \frac{1 - e^{2x\sqrt{-1}}}{1 + e^{2x\sqrt{-1}}} \sqrt{-1}, \\ \cot x = \frac{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}{e^{2x\sqrt{-1}} - 1} \sqrt{-1}. \end{cases}$$

Ähnliche Formeln würden sich auch für die übrigen goniometrischen Functionen entwickeln lassen, wobei wir jedoch hier nicht aufhalten wollen, weil die Sache gar keine Schwierigkeit darbietet.

## §. 2.

Unter dem natürlichen Logarithmus der imaginären Grösse  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ , d. i. in der aus der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz bekannten Bezeichnung unter der Grösse  $l(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ , verstehen wir eine Grösse von solcher Beschaffenheit, dass

$$17) \quad e^{l(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

ist. Setzen wir nun

$$18) \quad l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = p + q\sqrt{-1},$$

so muss also

$$e^{p+q\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

folglich nach 9)

$$e^{p(\cos q + \sin q\sqrt{-1})} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

sein, woraus sich zur Bestimmung der Grössen  $p$  und  $q$  die beiden Gleichungen

$$19) \quad e^p \cos q = \alpha, \quad e^p \sin q = \beta$$

ergeben. Quadriert man diese beiden Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man

$$20) \quad e^{2p} = \alpha^2 + \beta^2,$$

folglich  $2p = \ln(\alpha^2 + \beta^2)$  oder

$$21) \quad p = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + \beta^2).$$

Also ist

$$e^p = e^{\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + \beta^2)} = e^{\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + \beta^2)},$$

d. i. nach dem allgemeinen Begriffe der Logarithmen:

$$e^p = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2};$$

und wegen der Gleichungen 19) muss folglich  $q$  so bestimmt werden, dass zugleich

$$\cos q \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha, \quad \sin q \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \beta$$

oder

$$22) \quad \cos q = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin q = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}};$$

oder dass

$$23) \quad q = \text{Arc cos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{Arc sin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

ist, welches offenbar jederzeit möglich ist, weil

$$\left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 + \left( \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right)^2 = 1$$

ist. Uebrigens kann man, da nach 22)

$$24) \quad \text{tang} q = \frac{\beta}{\alpha}$$

ist,  $q$  auch mittelst der Gleichung

$$25) \quad q = \text{Arctang} \frac{\beta}{\alpha}$$

bestimmen, hat dann aber zu bemerken, dass sich der Bogen  $q$  im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigen muss, wenn respective  $\alpha$  positiv und  $\beta$  positiv,  $\alpha$  negativ und  $\beta$  positiv,  $\alpha$  negativ und  $\beta$  negativ,  $\alpha$  positiv und  $\beta$  negativ ist, weil nur, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, zugleich

$$q = \operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

man kann, wie es nach dem Obigen erfordert wird.

Ist nun  $q$  gehörig bestimmt, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar die Gleichung

$$26) \quad l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + q\sqrt{-1}.$$

Auf ähnliche Art wie vorher verstehen wir, wenn  $B$  eine beliebige positive Grösse bezeichnet, überhaupt unter dem Logarithmus der imaginären Grösse  $\alpha + \beta\sqrt{-1}$  für die Basis  $B$ , welcher durch  $\log(\alpha + \beta\sqrt{-1})$  bezeichnet werden mag, eine Grösse von unbekannter Beschaffenheit, dass

$$27) \quad B^{\log(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

ist.

Setzen wir nun  $e = B^M$ , so ist

$$e^{l(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = (B^M)^{l(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

also nach 26)

$$e^{l(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = (B^M)^{\frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + q\sqrt{-1}}.$$

Nach 4) ist aber

$$\begin{aligned} & (B^M)^{\frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + q\sqrt{-1}} \\ &= e^{\frac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) \cdot M l B} \{ \cos(Mq l B) + \sin(Mq l B) \cdot \sqrt{-1} \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & B^{\frac{1}{2} M l(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}} \\ &= e^{\frac{1}{2} M l(\alpha^2 + \beta^2) \cdot l B} \{ \cos(Mq l B) + \sin(Mq l B) \cdot \sqrt{-1} \}, \end{aligned}$$

so dass also offenbar

$$(B^M)^{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}} = B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$e^{l(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}}$$

ist. Weil nun aber nach 17)

$$e^{l(\alpha+\beta\sqrt{-1})} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

ist, so ist

$$B^{\frac{1}{2}Ml(\alpha^2+\beta^2)+Mq\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung 27), so giebt sich auf der Stelle

$$28) \quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} Ml(\alpha^2+\beta^2) + Mq\sqrt{-1}$$

oder

$$29) \quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = M\left\{\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+q\sqrt{-1}\right\},$$

also nach 26):

$$30) \quad \log(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = Ml(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Die Grösse  $M$ , mit welcher man hiernach den natürlichen Logarithmus  $l(\alpha+\beta\sqrt{-1})$  multipliciren muss, um den Logarithmus  $\log(\alpha+\beta\sqrt{-1})$  für die Basis  $B$  zu erhalten, man den Modulus des logarithmischen Systems, dessen Basis  $B$  ist.

Weil nach dem Obigen bekanntlich  $e=B^M$  ist, so ist

$$le=1=MlB, \quad \log e = M\log B = M;$$

also

$$31) \quad M = \frac{1}{lB} = \log e.$$

Setzt man also natürlich auch

$$\log(\alpha^2+\beta^2) = Ml(\alpha^2+\beta^2),$$

so ist nach 28):

$$32) \quad \log(\alpha + \beta \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}.$$

Da  $q$  offenbar unendlich viele verschiedene Werthe haben kann, so hat auch  $\log(\alpha + \beta \sqrt{-1})$  jederzeit unendlich viele verschiedene Werthe.

Für  $\alpha = +1$  und  $\beta = 0$  muss  $q$  so bestimmt werden, dass

$$q = \operatorname{Arccos}(+1) = \operatorname{Arcsin} 0$$

ist. Dies giebt, wenn  $k$  eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,  $q = 2k\pi$ .

Für  $\alpha = -1$  und  $\beta = 0$  muss  $q$  so bestimmt werden, dass

$$q = \operatorname{Arccos}(-1) = \operatorname{Arcsin} 0$$

ist. Dies giebt, wenn  $k$  wieder eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,  $q = (2k+1)\pi$ .

Also ist nach der Gleichung 32), wenn man nur bemerkt, dass man in dieser Gleichung für  $\log(\alpha^2 + \beta^2)$  natürlich immer den reellen Werth dieses Logarithmus setzen muss, welcher für  $\alpha = \pm 1$ ,  $\beta = 0$  bekanntlich 0 ist, für jedes positive oder negative ganze  $k$ :

$$33) \quad \log(+1) = 2kM\pi\sqrt{-1}$$

und

$$34) \quad \log(-1) = (2k+1)M\pi\sqrt{-1}.$$

Ueberhaupt erhält man aus der Gleichung 32) für  $\beta = 0$ :

$$35) \quad \log \alpha = \frac{1}{2} \log \alpha^2 + Mq\sqrt{-1},$$

wo  $\log \alpha^2$  den reellen Werth, welchen dieser Logarithmus, weil  $\alpha^2$  positiv ist, nothwendig jederzeit haben muss, bezeichnet. Auch erhellet leicht, dass in diesem Falle

$$q = \operatorname{Arccos}(\pm 1) = \operatorname{Arcsin} 0$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem  $\alpha$  positiv oder negativ ist, welches darin seinen Grund hat, dass in den allgemeinen Gleichungen

$$q = \operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

die Quadratwurzel  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  immer positiv genommen werden. Ist also  $\alpha$  positiv, so ist  $q = 2k\pi$ ; ist dagegen  $\alpha$  negativ, so ist  $q = (2k+1)\pi$ , wo  $k$  immer jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Ist also  $\alpha$  positiv, so ist

$$36) \quad \log \alpha = \frac{1}{2} \log \alpha^2 + 2kM\pi\sqrt{-1};$$

ist dagegen  $\alpha$  negativ, so ist

$$37) \quad \log \alpha = \frac{1}{2} \log \alpha^2 + (2k+1)M\pi\sqrt{-1}.$$

Hieraus sieht man, dass der Logarithmus jeder reellen Grösse unendlich viele verschiedene Werthe hat. Ist diese reelle Grösse positiv, so findet sich unter den unendlich vielen verschiedenen Werthen ihres Logarithmus immer ein reeller Werth, wenn man aus der Gleichung 36) erhält, wenn man  $k=0$  setzt. Ist dagegen  $\alpha$  negativ, so sind alle Werthe des Logarithmus einer negativen reellen Grösse imaginär.

Ist nicht  $\beta=0$ , so kann wegen

$$q = \operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

offenbar nie  $q=0$  sein, und aus der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\log(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2) + Mq\sqrt{-1}$$

geht also hervor, dass die unendlich vielen verschiedenen Werthe, welche der Logarithmus einer imaginären Grösse haben, jederzeit sämmtlich imaginär sind.

### §. 3.

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist, wenn wir in Kürze wegen, die Quadratwurzel natürlich positiv genommen

$$38) \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



nd

$$39) \quad \varphi = \operatorname{Arccos} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

setzen:

$$40) \quad l(a + b\sqrt{-1}) = l\varrho + \varphi\sqrt{-1}.$$

Also ist

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1}) l(a + b\sqrt{-1}) = \alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach §. 1. ist, wie aus der Vergleichung der Gleichungen 2) und 3) auf der Stelle hervorgeht:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}} \\ &= 1 + \frac{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}}{1} \\ & \quad + \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^2}{1.2} \\ & \quad + \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^3}{1.2.3} \\ & \quad + \frac{\{\alpha l\varrho - \beta\varphi + (\beta l\varrho + \alpha\varphi)\sqrt{-1}\}^4}{1.2.3.4} \\ & \quad + \dots, \end{aligned}$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha \log - \beta \varphi + (\beta \log + \alpha \varphi) \sqrt{-1}} \\
 = & 1 + \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})}{1} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^2}{1.2} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^3}{1.2.3} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^4}{1.2.3.4} \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun der Analogie mit der bekannten Gleichung

$$e^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \frac{(x \log a)^3}{1.2.3} + \frac{(x \log a)^4}{1.2.3.4} + \dots$$

wegen:

$$\begin{aligned}
 (a + b \sqrt{-1})^{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = & 1 + \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})}{1} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^2}{1.2} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^3}{1.2.3} \\
 & + \frac{\{(\alpha + \beta \sqrt{-1}) \log(a + b \sqrt{-1})\}^4}{1.2.3.4} \\
 & + \dots,
 \end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn wir dies mit dem Obigen vergleichen, die Gleichung

$$(a + b \sqrt{-1})^{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = e^{\alpha \log - \beta \varphi + (\beta \log + \alpha \varphi) \sqrt{-1}},$$

d. i. nach 7) die Gleichung

$$41) \quad (a + b \sqrt{-1})^{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = e^{\alpha \log - \beta \varphi} \cdot e^{(\beta \log + \alpha \varphi) \sqrt{-1}}.$$

Nach 11) ist aber

$$e^{(\beta l \rho + \alpha \varphi) \sqrt{-1}} = \cos(\beta l \rho + \alpha \varphi) + \sin(\beta l \rho + \alpha \varphi) \cdot \sqrt{-1},$$

und folglich

$$\begin{aligned} 42) \quad & (a + b\sqrt{-1})^{\alpha + \beta\sqrt{-1}} \\ & = e^{\alpha l \rho - \beta \varphi} \{ \cos(\beta l \rho + \alpha \varphi) + \sin(\beta l \rho + \alpha \varphi) \cdot \sqrt{-1} \}, \end{aligned}$$

wo die Werthe von  $\rho$  und  $\varphi$  aus 38) und 39) bekannt sind.

#### §. 4.

Wir wollen jetzt die beiden Reihen

$$1, -\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^2}{1.2}, \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^4}{1...4}, -\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^6}{1...6}, \dots$$

und

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, -\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3}, \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^5}{1...5}, -\frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^7}{1...7}, \dots$$

zu summiren suchen.

In der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz (43.) ist gezeigt worden, dass für jedes  $x$

$$\begin{aligned} & e^{x \cos \theta} \{ \cos(x \sin \theta) + \sin(x \sin \theta) \cdot \sqrt{-1} \} \\ & = 1 + \frac{x}{1} (\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1}) \\ & \quad + \frac{x^2}{1.2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}) \\ & \quad + \frac{x^3}{1.2.3} (\cos 3\theta + \sin 3\theta \sqrt{-1}) \\ & \quad + \frac{x^4}{1...4} (\cos 4\theta + \sin 4\theta \sqrt{-1}) \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

ist. Setzt man in dieser Gleichung zuerst  $x = \rho$ , dann  $x = -\rho$ , so erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
& e^{\rho \cos \theta} \{ \cos(\rho \sin \theta) + \sin(\rho \sin \theta) \cdot \sqrt{-1} \} \\
&= 1 + \frac{\rho}{1} (\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^2}{1.2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^3}{1.2.3} (\cos 3\theta + \sin 3\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^4}{1...4} (\cos 4\theta + \sin 4\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& e^{-\rho \cos \theta} \{ \cos(\rho \sin \theta) - \sin(\rho \sin \theta) \cdot \sqrt{-1} \} \\
&= 1 - \frac{\rho}{1} (\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^2}{1.2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad - \frac{\rho^3}{1.2.3} (\cos 3\theta + \sin 3\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^4}{1...4} (\cos 4\theta + \sin 4\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad - \dots
\end{aligned}$$

Durch Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen erhält man die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
43) \quad & \frac{e^{\rho \cos \theta} + e^{-\rho \cos \theta}}{2} \cos(\rho \sin \theta) + \frac{e^{\rho \cos \theta} - e^{-\rho \cos \theta}}{2} \sin(\rho \sin \theta) \cdot \sqrt{-1} \\
&= 1 \\
&\quad + \frac{\rho^2}{1.2} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^4}{1...4} (\cos 4\theta + \sin 4\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^6}{1...6} (\cos 6\theta + \sin 6\theta \sqrt{-1}) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 44) \quad & \frac{e^{\rho \cos \theta} - e^{-\rho \cos \theta}}{2} \cos(\rho \sin \theta) + \frac{e^{\rho \cos \theta} + e^{-\rho \cos \theta}}{2} \sin(\rho \sin \theta) \cdot \sqrt{-1} \\
 &= \frac{\rho}{1} (\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1}) \\
 &\quad + \frac{\rho^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\cos 3\theta + \sin 3\theta \sqrt{-1}) \\
 &\quad + \frac{\rho^5}{1 \dots 5} (\cos 5\theta + \sin 5\theta \sqrt{-1}) \\
 &\quad + \frac{\rho^7}{1 \dots 7} (\cos 7\theta + \sin 7\theta \sqrt{-1}) \\
 &\quad + \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun, was offenbar verstatet ist:

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} = \rho (\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

$$\beta + \alpha \sqrt{-1} = \rho (\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1});$$

$\omega$  ist

$$\rho \cos \omega = \alpha, \quad \rho \sin \omega = \beta; \quad \rho \cos \theta = \beta, \quad \rho \sin \theta = \alpha$$

oder

$$\cos \omega = \frac{\alpha}{\rho}, \quad \sin \omega = \frac{\beta}{\rho}; \quad \cos \theta = \frac{\beta}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{\alpha}{\rho};$$

folglich

$$\cos \theta = \sin \omega; \quad \sin \theta = \cos \omega.$$

Also ist

$$\cos(\theta + \omega) = \cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega = 0,$$

$$\sin(\theta + \omega) = \sin \theta \cos \omega + \cos \theta \sin \omega = 1;$$

und folglich, indem  $k$  eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet:

$$\theta + \omega = (2k + \frac{1}{2})\pi.$$

Also ist

$$\theta = (2k + \frac{1}{2})\pi - \omega,$$

$$2\theta = (4k + 1)\pi - 2\omega,$$

$$3\theta = (6k + \frac{3}{2})\pi - 3\omega,$$

$$4\theta = (8k + 2)\pi - 4\omega,$$

$$5\theta = (10k + \frac{5}{2})\pi - 5\omega,$$

$$6\theta = (12k + 3)\pi - 6\omega,$$

$$7\theta = (14k + \frac{7}{2})\pi - 7\omega,$$

$$8\theta = (16k + 4)\pi - 8\omega,$$

u. s. w.

und folglich

$$\cos\theta = +\sin\omega, \quad \sin\theta = +\cos\omega;$$

$$\cos 2\theta = -\cos 2\omega, \quad \sin 2\theta = +\sin 2\omega;$$

$$\cos 3\theta = -\sin 3\omega, \quad \sin 3\theta = -\cos 3\omega;$$

$$\cos 4\theta = +\cos 4\omega, \quad \sin 4\theta = -\sin 4\omega;$$

$$\cos 5\theta = +\sin 5\omega, \quad \sin 5\theta = +\cos 5\omega;$$

$$\cos 6\theta = -\cos 6\omega, \quad \sin 6\theta = +\sin 6\omega;$$

$$\cos 7\theta = -\sin 7\omega, \quad \sin 7\theta = -\cos 7\omega;$$

$$\cos 8\theta = +\cos 8\omega, \quad \sin 8\theta = -\sin 8\omega;$$

u. s. w.

u. s. w.

Also ist nach 43) und 44)

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega) + \frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega) \cdot \sqrt{-1} \\
&= 1 \\
&\quad - \frac{\rho^2}{1 \cdot 2} (\cos 2\omega - \sin 2\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^4}{1 \cdot 4} (\cos 4\omega - \sin 4\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad - \frac{\rho^6}{1 \cdot 6} (\cos 6\omega - \sin 6\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega) + \frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega) \cdot \sqrt{-1} \\
&= \frac{\rho}{1} (\sin \omega + \cos \omega \sqrt{-1}) \\
&\quad - \frac{\rho^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\sin 3\omega + \cos 3\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad + \frac{\rho^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} (\sin 5\omega + \cos 5\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad - \frac{\rho^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} (\sin 7\omega + \cos 7\omega \sqrt{-1}) \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega) \\
&= 1 - \frac{\rho^2}{1 \cdot 2} \cos 2\omega + \frac{\rho^4}{1 \cdot 4} \cos 4\omega - \frac{\rho^6}{1 \cdot 6} \cos 6\omega + \dots \\
& \frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega) \\
&= \frac{\rho^2}{1 \cdot 2} \sin 2\omega - \frac{\rho^4}{1 \cdot 4} \sin 4\omega + \frac{\rho^6}{1 \cdot 6} \sin 6\omega - \dots,
\end{aligned}$$

$$\frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega)$$

$$= \frac{\rho}{1} \sin \omega - \frac{\rho^3}{1.2.3} \sin 3\omega + \frac{\rho^5}{1...5} \sin 5\omega - \frac{\rho^7}{1...7} \sin 7\omega + \dots,$$

$$\frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega)$$

$$= \frac{\rho}{1} \cos \omega - \frac{\rho^3}{1.2.3} \cos 3\omega + \frac{\rho^5}{1...5} \cos 5\omega - \frac{\rho^7}{1...7} \cos 7\omega + \dots;$$

also

$$\frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega) - \frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega) \cdot \sqrt{-1}$$

$$= 1$$

$$- \frac{\rho^2}{1.2} (\cos 2\omega + \sin 2\omega \sqrt{-1})$$

$$+ \frac{\rho^4}{1...4} (\cos 4\omega + \sin 4\omega \sqrt{-1})$$

$$- \frac{\rho^6}{1...6} (\cos 6\omega + \sin 6\omega \sqrt{-1})$$

$$+ \dots$$

und

$$\frac{e^{\rho \sin \omega} + e^{-\rho \sin \omega}}{2} \sin(\rho \cos \omega) + \frac{e^{\rho \sin \omega} - e^{-\rho \sin \omega}}{2} \cos(\rho \cos \omega) \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \frac{\rho}{1} (\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1})$$

$$- \frac{\rho^3}{1.2.3} (\cos 3\omega + \sin 3\omega \sqrt{-1})$$

$$+ \frac{\rho^5}{1...5} (\cos 5\omega + \sin 5\omega \sqrt{-1})$$

$$- \frac{\rho^7}{1...7} (\cos 7\omega + \sin 7\omega \sqrt{-1})$$

$$+ \dots$$



Weil nun

$$\rho \cos \omega = \alpha, \quad \rho \sin \omega = \beta$$

und

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} = \rho (\cos \omega + \sin \omega \sqrt{-1}),$$

also für jedes positive ganze  $n$

$$(\alpha + \beta \sqrt{-1})^n = \rho^n (\cos n\omega + \sin n\omega \sqrt{-1})$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden für jedes reelle  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$45) \quad \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos \alpha - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin \alpha \sqrt{-1}$$

$$= 1 - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^4}{1..4} - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^6}{1...6} + \dots$$

und

$$46) \quad \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin \alpha + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos \alpha \sqrt{-1}$$

$$= \alpha + \beta \sqrt{-1} - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^5}{1..5} - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^7}{1.....7} + \dots$$

Der Analogie mit den beiden in der Abhandlung über den Binomischen Lehrsatz (47. und 48.) bewiesenen, für jedes reelle  $x$  geltenden Gleichungen

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1...6} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..5} - \frac{x^7}{1...7} + \dots$$

wegen setzt man nun:

$$\cos(\alpha + \beta \sqrt{-1})$$

$$= 1 - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^4}{1..4} - \frac{(\alpha + \beta \sqrt{-1})^6}{1...6} + \dots,$$

$$\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

$$= \alpha + \beta\sqrt{-1} - \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^5}{1...5} - \frac{(\alpha + \beta\sqrt{-1})^7}{1...7} + \dots;$$

und erhält also nach 45) und 46) die beiden folgenden Gleichungen:

$$47) \quad \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos \alpha - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin \alpha \sqrt{-1},$$

$$48) \quad \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin \alpha + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos \alpha \sqrt{-1}.$$

Ueberträgt man ferner die bekannten Begriffe der übrigen goniometrischen Functionen auch auf imaginäre Bogen, so erhält man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$49) \quad \tan(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{(e^\beta + e^{-\beta}) \sin \alpha + (e^\beta - e^{-\beta}) \cos \alpha \sqrt{-1}}{(e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha - (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \sqrt{-1}},$$

$$50) \quad \cot(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{(e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha - (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \sqrt{-1}}{(e^\beta + e^{-\beta}) \sin \alpha + (e^\beta - e^{-\beta}) \cos \alpha \sqrt{-1}};$$

und folglich, wenn man Zähler und Nenner des ersten Bruchs mit

$$(e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha + (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \sqrt{-1},$$

Zähler und Nenner des zweiten Bruchs mit

$$(e^\beta + e^{-\beta}) \sin \alpha - (e^\beta - e^{-\beta}) \cos \alpha \sqrt{-1}$$

multiplicirt:

$$51) \quad \tan(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{2 \sin 2\alpha + (e^{2\beta} - e^{-2\beta}) \sqrt{-1}}{2 \cos 2\alpha + e^{2\beta} + e^{-2\beta}},$$

$$52) \quad \cot(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = - \frac{2 \sin 2\alpha - (e^{2\beta} - e^{-2\beta}) \sqrt{-1}}{2 \cos 2\alpha - e^{2\beta} - e^{-2\beta}}.$$

Ferner findet man leicht:

$$53) \quad \sec(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 2 \frac{(e^\beta + e^{-\beta}) \cos \alpha + (e^\beta - e^{-\beta}) \sin \alpha \sqrt{-1}}{e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2 \cos 2\alpha},$$

$$54) \operatorname{cosec}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 2 \frac{(e^\beta + e^{-\beta})\sin\alpha - (e^\beta - e^{-\beta})\cos\alpha\sqrt{-1}}{e^{2\beta} + e^{-2\beta} - 2\cos 2\alpha}.$$

Auch ist endlich:

$$55) \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 1 - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha\sqrt{-1},$$

$$56) \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 1 - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha\sqrt{-1}.$$

### §. 5.

Weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha\sqrt{-1},$$

$$\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha\sqrt{-1}$$

und

$$\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{2} \sin\gamma + \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2} \cos\gamma\sqrt{-1},$$

$$\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) = \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{2} \cos\gamma - \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2} \sin\gamma\sqrt{-1}$$

ist; so erhält man leicht durch Multiplication

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) + \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}) \\ &= \left\{ \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{2} + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2} \right\} \sin(\alpha + \gamma) \\ &+ \left\{ \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^\delta + e^{-\delta}}{2} + \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^\delta - e^{-\delta}}{2} \right\} \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) - \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}) \\ = & \left\{ \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2} + \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\delta} - e^{-\delta}}{2} \right\} \cos(\alpha + \gamma) \\ & - \left\{ \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2} + \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cdot \frac{e^{\delta} - e^{-\delta}}{2} \right\} \sin(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

also, wie sich hieraus ferner leicht ergibt:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) + \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}) \\ = & \frac{e^{\beta+\delta} + e^{-(\beta+\delta)}}{2} \sin(\alpha + \gamma) + \frac{e^{\beta+\delta} - e^{-(\beta+\delta)}}{2} \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) - \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}) \\ = & \frac{e^{\beta+\delta} + e^{-(\beta+\delta)}}{2} \cos(\alpha + \gamma) - \frac{e^{\beta+\delta} - e^{-(\beta+\delta)}}{2} \sin(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Weil nun nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\begin{aligned} & \sin\{\alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}\} = \sin\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1})\} \\ = & \frac{e^{\beta+\delta} + e^{-(\beta+\delta)}}{2} \sin(\alpha + \gamma) + \frac{e^{\beta+\delta} - e^{-(\beta+\delta)}}{2} \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos\{\alpha + \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}\} = \cos\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1})\} \\ = & \frac{e^{\beta+\delta} + e^{-(\beta+\delta)}}{2} \cos(\alpha + \gamma) - \frac{e^{\beta+\delta} - e^{-(\beta+\delta)}}{2} \sin(\alpha + \gamma) \cdot \sqrt{-1} \end{aligned}$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden:

$$57). \sin\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1})\}$$

$$= \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) + \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}),$$

$$58) \cos\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + (\gamma + \delta\sqrt{-1})\}$$

$$= \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) - \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}).$$

Aus dem vorhergehenden Paragraphen ergeben sich aber auch leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$59) \sin(-\alpha - \beta\sqrt{-1}) = -\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

$$60) \quad \cos(-\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1});$$

also ist nach 57) und 58), wenn man  $-\gamma$  und  $-\delta$  für  $\gamma$  und  $\delta$  setzt:

$$61) \quad \sin\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - (\gamma + \delta\sqrt{-1})\}$$

$$= \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) - \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}),$$

$$62) \quad \cos\{(\alpha + \beta\sqrt{-1}) - (\gamma + \delta\sqrt{-1})\}$$

$$= \cos(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\gamma + \delta\sqrt{-1}) + \sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\sin(\gamma + \delta\sqrt{-1}).$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung  $\alpha + \beta\sqrt{-1} = \gamma + \delta\sqrt{-1}$ , und bemerkt, dass nach 47) und 48) offenbar

$$63) \quad \cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$$

so erhält man

$$64) \quad (\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}))^2 + (\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}))^2 = 1.$$

Auf ähnliche Art ergibt sich aus 57) und 58)

$$65) \quad \sin 2(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = 2\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1})\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

$$66) \quad \cos 2(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = (\cos(\alpha + \beta\sqrt{-1}))^2 - (\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}))^2.$$

Es ist hier nicht meine Absicht, die Zahl dieser Relationen zu erschöpfen, und man hat das Vorhergehende nur als eine Anleitung zu betrachten, wie die aus der Goniometrie bekannten Relationen zwischen den goniometrischen Functionen reeller Bogen auf die goniometrischen Functionen imaginärer Bogen erweitert werden können.

## §. 6.

Setzen wir jetzt

$$67) \quad \text{Arc}'\sin(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}.$$

so muss

$$\sin(x+y\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 48)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x \sqrt{-1} = \alpha + \beta \sqrt{-1},$$

und folglich

$$68) \quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x = \alpha, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \beta$$

oder

$$69) \quad (e^y + e^{-y}) \sin x = 2\alpha, \quad (e^y - e^{-y}) \cos x = 2\beta$$

sein, weshalb es jetzt also darauf ankommt, die Grössen  $x$   $y$  so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt w

Quadrirt man die Gleichungen 69), so erhält man:

$$70) \quad \begin{cases} (e^{2y} + e^{-2y} + 2) \sin^2 x = 4\alpha^2, \\ (e^{2y} + e^{-2y} - 2) \cos^2 x = 4\beta^2; \end{cases}$$

also

$$71) \quad \begin{cases} (e^{2y} + e^{-2y} + 2) \sin^2 x \cos^2 x = 4\alpha^2 \cos^2 x, \\ (e^{2y} + e^{-2y} - 2) \sin^2 x \cos^2 x = 4\beta^2 \sin^2 x; \end{cases}$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$72) \quad \sin^2 x \cos^2 x = \alpha^2 \cos^2 x - \beta^2 \sin^2 x,$$

woraus sich leicht die Gleichung

$$73) \quad \sin^4 x - (1 + \alpha^2 + \beta^2) \sin^2 x + \alpha^2 = 0,$$

folglich

$$74) \quad \sin^2 x = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

ergiebt.

Weil

$$(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 = (1 - \alpha^2)^2 + 2\beta^2(1 + \alpha^2 + \frac{1}{2}\beta^2)$$

ist, so ist die Grösse

$$\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2$$

offenbar immer positiv, also die Grösse

$$\sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

stets reell.

Ferner ist immer

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} \geq 1,$$

welches sich auf folgende Art beweisen lässt. Die vorstehende Bedingung ist nämlich jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \geq 2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \geq 1$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist aber offenbar jederzeit erfüllt, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 1$$

ist. Wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1$$

ist, so ist

$$1 - \alpha^2 - \beta^2 > 0,$$

und die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \geq 1$$

ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \geq 1 - \alpha^2 - \beta^2$$

oder

$$(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2 \geq (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\begin{aligned} & 1 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 \\ & \geq 1 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2, \end{aligned}$$

welche mit der Bedingung

$$2\beta^2 \geq -2\beta^2$$

identisch ist, erfüllt ist. Da nun diese Bedingung offenbar jederzeit erfüllt ist, so ist auch in dem Falle, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 < 1$$

ist, die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \geq 1$$

immer erfüllt. Hieraus ergibt sich nun mit völliger Deutlichkeit, dass immer

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} \geq 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Eben so leicht lässt sich zeigen, dass immer

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} < 1$$

ist, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Grösse

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$



offenbar immer positiv ist. Die Bedingung

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} \leq 1$$

ist nämlich jederzeit erfüllt, wenn die Bedingung

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \leq 2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \leq 1$$

erfüllt ist. Diese Bedingung ist jederzeit erfüllt, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$$

ist. Wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 > 1$$

ist, so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 > 0,$$

und die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \leq 1$$

ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 - 1 \leq \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2}$$

oder

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 1)^2 \leq (1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2,$$

d. i. wenn die Bedingung

$$\begin{aligned} & 1 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2 \\ & \leq 1 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha^2\beta^2, \end{aligned}$$

welche mit der Bedingung

$$-2\beta^2 \leq 2\beta^2$$

identisch ist, erfüllt ist. Da nun diese Bedingung offenbar immer erfüllt ist, so ist auch in dem Falle, wenn

$$\alpha^2 + \beta^2 > 1$$

ist, die Bedingung

$$\alpha^2 + \beta^2 - \sqrt{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2} \leq 1$$

erfüllt. Hieraus ergibt sich jetzt mit völliger Deutlichkeit, dass immer

$$\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} \leq 1$$

ist, wie behauptet wurde.

Weil nun immer

$$\sin x^2 \leq 1$$

sein muss, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden, dass man im Obigen im Allgemeinen die untern Zeichen zu nehmen, und folglich

$$75) \quad \sin x^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

oder

$$76) \quad \sin x^2 = \frac{\alpha^2}{\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}},$$

also

$$77) \quad \sin x = \pm \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

zu setzen hat, wo sich nun noch fragt, wie in dieser Gleichung das Zeichen zu nehmen ist, was sich leicht auf folgende Art bestimmen lässt. Da nämlich nach 69)

$$(e^y + e^{-y}) \sin x = 2\alpha$$

und  $e^y + e^{-y}$  stets eine positive Grösse ist, so hat  $\sin x$  mit  $\alpha$  gleiches Vorzeichen, und man muss also in der Gleichung 77) das obere Zeichen nehmen, d. h.

$$78) \quad \sin x = \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

setzen.

Mittelst der Gleichung 75) erhält man sogleich

$$79) \quad \cos x^2 = \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2}$$

oder

$$\cos x^2 = \frac{\left( \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} \right)^2 - \left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 + \alpha^2}{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} - \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2}},$$

d. i. nach gehöriger Entwicklung

$$\cos x^2 = \frac{-\beta^2}{\frac{1-\alpha^2-\beta^2}{2} - \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2}}$$

oder

$$80) \quad \cos x^2 = \frac{\beta^2}{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2}};$$

und wir haben also jetzt

$$81) \begin{cases} \sin x = \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \\ \cos x = \pm \frac{\beta}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}; \end{cases}$$

wo wegen des doppelten Vorzeichens in der zweiten dieser beiden Gleichungen noch die folgenden Bestimmungen zu geben sind

Wenn der Bogen

$$x = \text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, je nachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Wenn der Bogen

$$x = \text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  negativ wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, je nachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Es ist nun

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\sin x} + \frac{\beta}{\cos x} \\ &= \left\{ \frac{\alpha + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \pm \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{\sin x} - \frac{\beta}{\cos x}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

oder der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\sin x} + \frac{\beta}{\cos x} = M \pm N,$$

$$\frac{\alpha}{\sin x} - \frac{\beta}{\cos x} = M \mp N.$$

Weil aber nach 68)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{\alpha}{\sin x}, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{\beta}{\cos x}$$

folglich

$$e^y = \frac{\alpha}{\sin x} + \frac{\beta}{\cos x}, \quad e^{-y} = \frac{\alpha}{\sin x} - \frac{\beta}{\cos x}$$

ist, so ist

$$\left( \frac{\alpha}{\sin x} + \frac{\beta}{\cos x} \right) \left( \frac{\alpha}{\sin x} - \frac{\beta}{\cos x} \right) = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(M + N)(M - N) = 1,$$

woraus sich

$$l(M + N) + l(M - N) = 0,$$

folglich

$$l(M - N) = -l(M + N)$$

ergibt. Daher ist

$$l(M \pm N) = \pm l(M + N),$$

und folglich nach dem Obigen

$$1\left(\frac{\alpha}{\sin x} + \frac{\beta}{\cos x}\right) = \pm 1(M+N),$$

d. i.

$$y = \pm 1(M+N)$$

oder

$$y = \pm 1 \left\{ \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Nehmen wir dies mit dem Obigen zusammen, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$82) \quad \text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

$$= \text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\pm 1 \left\{ \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \sqrt{-1},$$

in welcher man, wenn

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, je nachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist, dagegen, wenn

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, je nachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

## §. 7.

Auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Paragraphen wollen wir nun auch

$$83) \quad \text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

behandeln. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\cos(x + y\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 47)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \sqrt{-1} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

und folglich

$$84) \quad \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x = \alpha, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x = -\beta$$

oder

$$85) \quad (e^y + e^{-y}) \cos x = 2\alpha, \quad (e^y - e^{-y}) \sin x = -2\beta;$$

wo es also jetzt wieder darauf ankommt, die Grössen  $x$  und  $y$  so zu bestimmen, dass diesen beiden Gleichungen genügt wird.

Quadriert man die Gleichungen 85), so erhält man:

$$86) \quad \begin{cases} (e^{2y} + e^{-2y} + 2) \cos^2 x = 4\alpha^2, \\ (e^{2y} + e^{-2y} - 2) \sin^2 x = 4\beta^2; \end{cases}$$

also

$$87) \quad \begin{cases} (e^{2y} + e^{-2y} + 2) \sin^2 x \cos^2 x = 4\alpha^2 \sin^2 x, \\ (e^{2y} + e^{-2y} - 2) \sin^2 x \cos^2 x = 4\beta^2 \cos^2 x; \end{cases}$$

und folglich, wenn man subtrahirt:

$$88) \quad \sin^2 x \cos^2 x = \alpha^2 \sin^2 x - \beta^2 \cos^2 x,$$

woraus sich leicht die Gleichung

$$89) \quad \cos x^4 - (1 + \alpha^2 + \beta^2) \cos x^2 + \alpha^2 = 0,$$

folglich

$$90) \quad \cos x^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

ergibt.

Hieraus leitet man auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen die beiden folgenden Gleichungen ab:

$$91) \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin x = \pm \frac{\beta}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}; \end{cases}$$

bei denen die folgenden Bedingungen wegen der Vorzeichen zu beachten sind.

Wenn der Bogen

$$x = \text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Wenn der Bogen

$$x = \text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  negativ wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Ferner ist nun auch



$$\frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

oder der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x} = M \mp N,$$

$$\frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x} = M \pm N.$$

Weil aber nach 84)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{\alpha}{\cos x}, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -\frac{\beta}{\sin x}$$

und folglich

$$e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x}, \quad e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x}$$

ist, so ist

$$\left( \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x} \right) \left( \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x} \right) = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$(M + N)(M - N) = 1,$$

woraus sich

$$l(M + N) + l(M - N) = 0,$$

woraus sich leicht die Gleichung

$$89) \quad \cos x^4 - (1 + \alpha^2 + \beta^2) \cos x^2 + \alpha^2 = 0,$$

folglich

$$90) \quad \cos x^2 = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

ergibt.

Hieraus leitet man auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen die beiden folgenden Gleichungen ab:

$$91) \quad \begin{cases} \cos x = \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \\ \sin x = \pm \frac{\beta}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}; \end{cases}$$

bei denen die folgenden Bedingungen wegen der Vorzeichen zu beachten sind.

Wenn der Bogen

$$x = \operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, je nachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Wenn der Bogen

$$x = \operatorname{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man in der zweiten der beiden obigen Gleichungen das Zeichen so nehmen, dass  $\pm \beta$  negativ wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, je nachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Ferner ist nun auch

$$\frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mp \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x}$$

$$= \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\pm \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

der Kürze wegen

$$\frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x} = M \mp N,$$

$$\frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x} = M \pm N.$$

Weil aber nach 84)

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{\alpha}{\cos x}, \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -\frac{\beta}{\sin x}$$

und folglich

$$e^y = \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x}, \quad e^{-y} = \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x}$$

, so ist

$$\left( \frac{\alpha}{\cos x} - \frac{\beta}{\sin x} \right) \left( \frac{\alpha}{\cos x} + \frac{\beta}{\sin x} \right) = 1,$$

so nach dem Vorhergehenden

$$(M + N)(M - N) = 1,$$

daraus sich

$$1(M + N) + 1(M - N) = 0,$$

$$96) \quad e^{2y} = \frac{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}$$

$$= - \frac{\alpha}{\beta \sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

oder

$$97) \quad e^{-2y} = \frac{\alpha}{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

$$= - \frac{\beta \sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}$$

Folglich ist

$$98) \quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \pm \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = \frac{2\beta \sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

mit der Bestimmung, dass man, weil  $e^{2y} + e^{-2y}$  offenbar immer eine positive Grösse ist, in der ersten dieser beiden Gleichungen, und also natürlich auch überhaupt in allen vorhergehenden Gleichungen, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem  $\alpha$  eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nach 94) ist also immer mit derselben Bedingung wegen der Vorzeichen

$$\alpha = \frac{\alpha \sin 2x}{\alpha \cos 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}},$$

folglich

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten quadriert, nach einigen leichten Verwandlungen:

$$\tan 2x - 2\alpha = (\alpha^2 + \beta^2) \tan 2x,$$

und folglich

$$99) \quad \tan 2x = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Weil nun

$$\sin 2x^2 = \frac{\operatorname{tang} 2x^2}{1 + \operatorname{tang} 2x^2}, \quad \cos 2x^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} 2x^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$100) \quad \begin{cases} \sin 2x^2 = \frac{4\alpha^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}, \\ \cos 2x^2 = \frac{(1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}. \end{cases}$$

Nach dem Obigen war aber

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

oder

$$\cos 2x (\operatorname{tang} 2x - \alpha) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, je nachdem  $\alpha$  positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos 2x \left( \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2} - \alpha \right) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{4\alpha^2 \beta^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}},$$

$$\frac{\alpha(1 + \alpha^2 + \beta^2)}{1 - \alpha^2 - \beta^2} \cos 2x = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}},$$

und folglich

$$101) \quad \cos 2x = \pm \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}$$

oder nach 99)

$$102) \quad \cos 2x = \pm \frac{2}{\operatorname{tang} 2x} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}.$$

Weil nun

$$\sin 2x = \cos 2x \operatorname{tang} 2x$$

ist, so ist

$$103) \quad \sin 2x = \pm 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}.$$

$$96) \quad e^{2y} = \frac{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}$$

$$= - \frac{\alpha}{\beta \sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

oder

$$97) \quad e^{-2y} = \frac{\alpha}{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}$$

$$= - \frac{\beta \sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}$$

Folglich ist

$$98) \quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \pm \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = \frac{2\beta \sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

mit der Bestimmung, dass man, weil  $e^{2y} + e^{-2y}$  offen eine positive Grösse ist, in der ersten dieser beiden Gleichungen, und also natürlich auch überhaupt in allen vorherigen, das obere oder untere Zeichen nehmen muss, wenn  $\alpha$  eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nach 94) ist also immer mit derselben Bedingung Vorzeichen

$$\alpha = \frac{\alpha \sin 2x}{\alpha \cos 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}},$$

folglich

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

oder, wenn man auf beiden Seiten quadriert, in folgenden Verwandlungen:

$$\tan 2x - 2\alpha = (\alpha^2 + \beta^2) \tan 2x$$

und folglich

$$99) \quad \tan 2x = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

Weil nun

Da man aber bekanntlich in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem  $\alpha$  positiv oder negativ ist, so ist offenbar

$$104) \quad \sin 2x = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}},$$

und folglich, weil

$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\tan 2x}$$

ist:

$$105) \quad \cos 2x = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}.$$

Wir müssen also, damit die Gleichung

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

zugleich mit den oben rücksichtlich der Vorzeichen ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werde, den Bogen  $x$  so bestimmen, dass zugleich

$$\begin{aligned} 106) \quad x &= \frac{1}{2} \operatorname{Arc sin} \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arc cos} \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \end{aligned}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Weil nun, dies vorausgesetzt,

$$\sin 2x - \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

ist, so ist nach 98)

$$107) \quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \frac{2(\sin 2x - \alpha \cos 2x)}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = \frac{2\beta \sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

folglich

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = \frac{\sin 2x - \alpha \cos 2x}{\beta \sin 2x}$$

oder

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = \frac{1 - \alpha \cot 2x}{\beta};$$

also, weil

$$\cot 2x = \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha}$$

ist:

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = \frac{e^{4y} + 1}{e^{4y} - 1} = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{2\beta}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$e^{4y} = \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\beta},$$

d. i.

$$e^{4y} = \frac{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}{\alpha^2 + (1 - \beta)^2},$$

folglich

$$108) \quad y = \frac{1}{4} \ln \frac{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}{\alpha^2 + (1 - \beta)^2}.$$

Also hat man jetzt

$$109) \quad \text{Arctang}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = x + \frac{1}{4} \ln \frac{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}{\alpha^2 + (1 - \beta)^2} \cdot \sqrt{-1},$$

wo  $x$  so bestimmt werden muss, dass zugleich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \text{Arcsin} \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \text{Arc cos} \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \end{aligned}$$

ist. Man kann aber offenbar auch

$$\begin{aligned} 110) \quad &\text{Arctang}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \text{Arctang} \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}{\alpha^2 + (1 - \beta)^2} \cdot \sqrt{-1} \end{aligned}$$



setzen, wenn man nur den Bogen

$$\text{Arctang} \frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}$$

so nimmt, dass er sich im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten endigt, jenachdem  $\alpha$  positiv und  $1-\alpha^2-\beta^2$  positiv,  $\alpha$  positiv und  $1-\alpha^2-\beta^2$  negativ,  $\alpha$  negativ und  $1-\alpha^2-\beta^2$  negativ,  $\alpha$  negativ und  $1-\alpha^2-\beta^2$  positiv ist.

### §. 9.

Auf ähnliche Art wie vorher wollen wir jetzt auch

$$111) \quad \text{Arccot}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}$$

betrachten. Aus dieser Gleichung folgt

$$\cot(x + y\sqrt{-1}) = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

d. i. nach 52)

$$\frac{2\sin 2x - (e^{2y} - e^{-2y})\sqrt{-1}}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x} = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

und folglich

$$112) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2\sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}, \\ \beta = -\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}. \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{2\sin 2x}{e^{2y} - e^{-2y}},$$

oder

$$e^{2y} - e^{-2y} = -\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha},$$

oder

$$e^{4y} - 1 = -\frac{2\beta\sin 2x}{\alpha} e^{2y},$$

l. i.

$$113) \quad e^{4y} + \frac{2\beta \sin 2x}{\alpha} e^{2y} - 1 = 0.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung in Bezug auf  $e^{2y}$  als unbekannte Grösse erhält man

$$114) \quad e^{2y} = \frac{-\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x}}{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x}}$$

oder

$$115) \quad e^{-2y} = -\frac{\alpha}{\beta \sin 2x \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x}}$$

$$= \frac{\beta \sin 2x \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x}}{\alpha}.$$

Also ist

$$116) \quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \pm \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x}}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = -\frac{2\beta \sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

so wieder in der ersten dieser beiden Gleichungen, und also natürlich auch überhaupt in allen vorhergehenden Gleichungen, das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem  $\alpha$  eine positive oder eine negative Grösse ist.

Nach 112) ist also

$$\alpha = \frac{\alpha \sin 2x}{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x} - \alpha \cos 2x},$$

folglich

$$\sin 2x + \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 2x},$$

und, wenn man nun auf beiden Seiten quadriert, nach einigen leicht-  
en Verwandlungen:

$$\tan^2 2x + 2\alpha = (\alpha^2 + \beta^2) \tan^2 2x,$$

also

$$117) \quad \operatorname{tang} 2x = -\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}.$$

Ganz auf dieselbe Art wie im vorigen Paragraphen findet man hieraus

$$118) \quad \begin{cases} \sin 2x^2 = \frac{4\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}, \\ \cos 2x^2 = \frac{(1-\alpha^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}. \end{cases}$$

Nun war aber

$$\sin 2x + \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

oder

$$\cos 2x (\operatorname{tang} 2x + \alpha) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden muss, je nachdem  $\alpha$  positiv oder negativ ist. Also ist

$$\cos 2x \left( -\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2} + \alpha \right) = \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{4\alpha^2\beta^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

d. i.

$$-\frac{\alpha(1+\alpha^2+\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2} \cos 2x = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1+\alpha^2+\beta^2)^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

und folglich

$$119) \quad \cos 2x = \mp \frac{1-\alpha^2-\beta^2}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}}.$$

Weil nun

$$\sin 2x = \cos 2x \operatorname{tang} 2x$$

ist, so ist

$$120) \quad \sin 2x = \pm 2 \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\alpha^2 + (1-\alpha^2-\beta^2)^2}},$$

also, da man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem  $\alpha$  positiv oder negativ ist:

$$121) \quad \sin 2x = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}},$$

und folglich, weil

$$\cos 2x = \frac{\sin 2x}{\tan 2x}$$

ist:

$$122) \quad \cos 2x = - \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}}.$$

Wir müssen also, damit die Gleichung

$$\sin 2x + \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

gleich mit den oben rücksichtlich der Vorzeichen ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werde, den Bogen  $x$  so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} 123) \quad x &= \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} - \frac{1 - \alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{4\alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \beta^2)^2}} \end{aligned}$$

ist, welches offenbar immer möglich ist.

Weil nun, dies vorausgesetzt,

$$\sin 2x + \alpha \cos 2x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \sin 2x^2}$$

ist, so ist nach 116)

$$124) \quad \begin{cases} e^{2y} + e^{-2y} = \frac{2(\sin 2x + \alpha \cos 2x)}{\alpha}, \\ e^{2y} - e^{-2y} = - \frac{2\beta \sin 2x}{\alpha}; \end{cases}$$

folglich

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{e^{2y} - e^{-2y}} = - \frac{\sin 2x + \alpha \cos 2x}{\beta \sin 2x}.$$

Wenn der Bogen

$$\text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Auf ähnliche Art ist

$$129) \text{Arccosec}(\alpha + \beta\sqrt{-1})!$$

$$\begin{aligned} &= \text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ &\pm 1 \left\{ \left[ \frac{1+\alpha^2+\beta^2 + \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1-\alpha^2-\beta^2 + \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

mit folgenden Bestimmungen wegen der Vorzeichen.

Wenn der Bogen

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Mittelst der Gleichungen

$$\text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \text{Arccos}(1 - \alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

$$\text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \text{Arcsin}(1 - \alpha - \beta\sqrt{-1})$$

würden sich endlich auch leicht

$$\text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

entwickeln lassen, indem man die entwickelten Ausdrücke auf der Stelle erhält, wenn man in den bekannten Ausdrücken von

$$\text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

$1 - \alpha$  für  $\alpha$  und  $-\beta$  für  $\beta$  setzt.

## §. 11.

Es scheint nicht unzweckmässig zu sein, dem Obigen die folgenden kurzen Bemerkungen über die Differentialquotienten imaginärer Functionen hinzuzufügen.

### Erklärung.

Unter dem Differentialquotienten einer imaginären Function

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{-1},$$

wo  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  reelle Functionen von  $x$  bezeichnen sollen, welchen man wie bei reellen Functionen auch durch

Wenn der Bogen

$$\text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder zweiten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\text{Arccos} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im dritten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Auf ähnliche Art ist

$$129) \text{Arccosec}(\alpha + \beta\sqrt{-1})!$$

$$= \text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \pm 1 \left\{ \left[ \frac{1+\alpha^2+\beta^2 + \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \left[ \frac{1-\alpha^2-\beta^2 + \sqrt{(1+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\alpha^2}}{2(\alpha^2+\beta^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \sqrt{-1},$$

mit folgenden Bestimmungen wegen der Vorzeichen.

Wenn der Bogen

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

sich im ersten oder vierten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  negativ oder positiv ist.

Wenn der Bogen

$$\text{Arcsin} \frac{\alpha}{\left\{ \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} + \sqrt{\left( \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

sich im zweiten oder dritten Quadranten endigt, so muss man das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem  $\beta$  positiv oder negativ ist.

Mittelst der Gleichungen

$$\text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \text{Arccos}(1 - \alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

$$\text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \text{Arcsin}(1 - \alpha - \beta\sqrt{-1})$$

würden sich endlich auch leicht

$$\text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

entwickeln lassen, indem man die entwickelten Ausdrücke auf der Seite erhält, wenn man in den bekannten Ausdrücken von

$$\text{Arccos}(\alpha + \beta\sqrt{-1}) \text{ und } \text{Arcsin}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

$1-\alpha$  für  $\alpha$  und  $-\beta$  für  $\beta$  setzt.

## §. 11.

Es scheint nicht unzweckmässig zu sein, dem Obigen die folgenden kurzen Bemerkungen über die Differentialquotienten imaginärer Functionen hinzuzufügen.

### Erklärung.

Unter dem Differentialquotienten einer imaginären Function

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x)\sqrt{-1},$$

wo  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  reelle Functionen von  $x$  bezeichnen sollen, welchen man wie bei reellen Functionen auch durch



$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

zu bezeichnen pflegt, versteht man die Grösse

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \cdot \sqrt{-1},$$

die man also aus der Gleichung

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{-1}$$

immer leicht durch Differentiation der reellen Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  erhalten kann.

In der That enthält die vorstehende Erklärung Alles, was bei der Entwicklung der Differentialquotienten imaginärer Functionen zu wissen nöthig ist; dieselbe ist durch diese Erklärung unmittelbar auf die Entwicklung der Differentialquotienten reeller Functionen zurückgeführt, mit welcher man nur die in dieser Abhandlung entwickelte Theorie der imaginären Grössen zu verbinden hat, um in allen Fällen die Differentialquotienten imaginärer Functionen mit Leichtigkeit und ohne allen Anstoss entwickeln zu können. Nur hat man wohl fest zu halten, dass die aus der Gleichung

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{-1}$$

abgeleitete Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \cdot \sqrt{-1},$$

oder in anderer Bezeichnung

$$f'(x) = \varphi'(x) + \psi'(x) \cdot \sqrt{-1},$$

durchaus nur das Resultat der obigen Erklärung ist, und dass in vorstehender Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

seinem eigentlichen, mit Willkührlichkeit in der obigen Erklärung aufgestellten Begriffe nach, durchaus nicht mit den in obiger Gleichung in ganz ähnlicher Weise bezeichneten Grössen

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

verwechselt werden darf. Als die Differentialquotienten reeller Functionen sind dem eigentlichen und ursprünglichen Begriffe des Differentialquotienten nach

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

die Gränzen, denen die Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta \psi(x)}{\Delta x}$$

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn  $\Delta x$  sich der Null nähert. Dass aber von einer wirklichen Annäherung an eine bestimmte Gränze nur zwischen reellen Grössen die Rede sein kann, versteht sich wohl von selbst, da ja dabei von wirklichen Grössenvergleichen, in Bezug auf das Grössere und Kleinere, immer nothwendig die Rede sein muss. Und da von einer solchen Grössenvergleichen in Bezug auf das Grössere und Kleinere, nach meinen Begriffen wenigstens, bei oder zwischen imaginären Grössen gar keine Rede sein kann, so darf auch, wie schon erinnert, in der aus

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{-1}$$

gezogenen Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \cdot \sqrt{-1}$$

gewiss

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

seinem Begriffe nach, nie mit

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$$

verwechselt werden. In der That ist auch  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  eigentlich nur etwas Symbolisches, und nur das Resultat oder das Product der obigen an sich willkürlichen Erklärung der Differentialquotienten imaginärer Functionen.

Die Erklärung der Differentialquotienten reeller Functionen als der Gränzen, denen die entsprechenden Differenzenquotienten

sich bis zu jedem beliebigen Grade nähern, wenn das Increment der unabhängigen veränderlichen Grösse sich der Null nähert, ist etwas ganz für sich Bestehendes und bildet die eigenthümliche Grundlage der gesammten Differentialrechnung.

Die Erklärung der Differentialquotienten imaginärer Functionen, so wie dieselbe oben gegeben worden ist, ist auch etwas für sich Bestehendes, entspringt aber erst aus der Erklärung der Differentialquotienten reeller Functionen, oder setzt dieselbe voraus.

Beide Erklärungen dürfen nicht mit einander verwechselt werden, und am allerwenigsten dürfen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

jenachdem  $f(x)$  eine reelle oder eine imaginäre Function ist, als gleichbedeutende Dinge betrachtet werden.

Wenn nun der verehrte Verfasser des Aufsatzes Nr. I. in diesem XXsten Theile des Archivs, Herr Professor Dr. Matzke in Prag, in diesem zunächst gegen Cauchy, Schlömilch und mich gerichteten Aufsätze darauf besonderes Gewicht zu legen scheint, dass eine imaginäre Function in besonderen Fällen einen reellen Differentialquotienten haben könne, so muss ich mir darauf zu erwidern erlauben, dass ich daran seit meinem ersten Studium der Differentialrechnung noch nie einen Augenblick gezweifelt habe. Denn warum sollte denn in der aus der Gleichung

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sqrt{-1}$$

gezogenen Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \cdot \sqrt{-1}$$

nicht in gewissen besonderen Fällen der Differentialquotient  $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}$  der reellen Function  $\psi(x)$  verschwinden können? Um aber in der Kürze den Grundfehler und den Grundirrtum aufzudecken, welcher, nach meiner unmaassgeblichen Ansicht wenigstens, der ganzen Auffassungs- und Anschauungsweise des verehrten Herrn Verfassers des oben erwähnten Aufsatzes beiwohnt, erlaube ich mir Folgendes zu bemerken:

Eine imaginäre Function kann in besonderen Fällen allerdings einen reellen Differentialquotienten haben\*), aber durchaus nur

---

\*) Woran am wenigsten ich selbst jemals gezweifelt habe.

in dem Sinne, in welchem (der obigen Erklärung zufolge) eine imaginäre Function überhaupt bloss einen Differentialquotienten haben kann; nie und nimmermehr aber in dem Sinne eines wirklichen und eigentlichen Differentialquotienten einer reellen Function, als der Gränze nämlich; welcher der betreffende Differentialquotient sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn die Veränderung der unabhängigen veränderlichen Grösse sich der Null nähert.

Oder ganz kurz gesagt:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

sind, jenachdem  $f(x)$  eine reelle oder imaginäre Function ist, an sich ganz verschiedene Dinge, die nie mit einander verwechselt werden dürfen.

Dass Herr Professor Dr. Matzka Beides, wie es mir wenigstens scheint, mit einander verwechselt, und Beides gleichbedeutend nimmt: darin liegt der Grundfehler seiner ganzen Aufstellungs- und Anschauungsweise. Noch einmal: Eine imaginäre Function kann sehr wohl einen reellen Differentialquotienten haben, aber nur in dem Sinne, in welchem eine imaginäre Function überhaupt nur einen (sogenannten) Differentialquotienten haben kann, keineswegs in dem Sinne des (wirklichen oder eigentlichen) Differentialquotienten einer reellen Function.

Hiermit ist aber für mich wenigstens vollständig aufgeklärt, wie Herr Professor Dr. Matzka in dem erwähnten Aufsätze zu den von ihm gemachten sogenannten Einwürfen gekommen ist. Wer in die oben mehrfach hervorgehobenen Verwechslungen verfällt, wird sich allemal nothwendig in ähnlicher Weise aussprechen müssen. Widerlegt hat daher auch Herr Professor Dr. Matzka von allen dem, was ich in der von ihm angeführten Stelle meines „Leitfadens für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838.“ und anderwärts gesagt habe, gar Nichts, vielmehr dürften alle Bemerkungen aus einer verkehrten Grundansicht hervorgegangen sein, wie ich schon in der seinem Aufsätze am Ende beigefügten Bemerkung anzudeuten mir erlaubt habe. Und deshalb wird denn auch des trefflichen Cauchy vortreffliche Schreibart:

$$\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} \ln x^2,$$

insofern man das Differential  $\frac{\partial x}{x}$  in dem eigentlichen und ursprünglichen Sinne des wirklichen Differentials, oder vielmehr den Differentialquotienten  $\frac{1}{x}$  in dem eigentlichen und ursprünglichen Sinne

des wirklichen Differentialquotienten, als einer Gränze, welcher sich Differenzenquotient bis zu jedem beliebigen Grade nähert,  $\Delta x$  sich der Null nähert\*), was nur bei reellen Functionen lich ist, nicht in dem abgeleiteten mehr bloss symbolischen des Differentialquotienten einer imaginären Function, der man an sich gar nichts zu thun hat, auffasst, *auch foganz unangetastet stehen bleiben*. Weshalb ich, obgleich Herrn Professor Dr. Matzka's Ansichten in keiner Weise len konnte, seinen Aufsatz doch habe abdrucken lassen, sich schon in meiner Schlussbemerkung zu diesem Aufsatz gedeutet; hauptsächlich aber geschah es auf seinen mehrmals sehr dringender Weise gegen mich wiederholten Wunsch. muss ja das Archiv zur Austauschung entgegengesetzter Arten Gelegenheit darbieten. Nur darf ich als Herausgeber Interesse meiner Leser mir nicht erlauben, dergleichen Controversen zu weit auszudehnen. Daher betrachte ich die Verhandlungen über diesen Gegenstand jetzt auch vorläufig geschlossen, indem ich glaube, dass dieselben vollständig hinreichen, damit jeder Leser sich selbst ein Urtheil zu bilden Stande ist; und weiter ist zunächst nichts erforderlich.

---

\*) Und dass nur dieser Sinn an der angeführten Stelle „Leitfadens“ von mir festgehalten worden ist, hätte Herr Professor Matzka schon aus dem Orte selbst, wo meine Bemerkungen sich Systeme befinden, entnehmen können.

---

## IX.

## Ueber die Fusspunktcurven der Kegelschnitte.

Von dem

Herrn Doctor Schütte,

Lehrer an dem Pädagogium zu Patbua.

Ist eine Curve in der Ebene gegeben, ausgedrückt durch eine Gleichung zwischen ihren rechtwinkligen Coordinaten, und ausser ihr ein Punkt, dessen Coordinaten seien  $\alpha$  und  $\beta$ ; zieht man ferner an die Curve alle nur möglichen Tangenten und fällt von dem festen Punkte auf jede derselben Perpendikel, so liegen die Durchschnittspunkte der einzelnen Tangenten und der respectiven Perpendikel auf einer neuen Curve, welche die Fusspunktencurve genannt wird, und in Bezug auf welche der feste Punkt der Pol heisst. Die Coordinaten des Fusspunktes des Perpendikels seien  $\xi$  und  $\eta$ ; hat man diese als Functionen der Variablen  $x$  und  $y$  und ihrer respectiven Ableitungen dargestellt, so dass sie unter der Form

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

erscheinen, so kann man aus diesen beiden Gleichungen und der Gleichung der gegebenen Curve  $x$  und  $y$  eliminiren, so dass man eine Gleichung zwischen  $\xi$  und  $\eta$  gewinnt, die gesuchte Gleichung der Fusspunktcurve. Es sind also zunächst  $\xi$  und  $\eta$  als Functionen von  $x$  und  $y$  und deren Ableitungen darzustellen.

Die Gleichung der Tangente ist bekanntlich

$$(\xi - x) \frac{dy}{dx} = \eta - y;$$

die Gleichung des vom Pol auf die Tangente gefällten Perpendikels sei

$$\eta = m\xi + \mu,$$

in welcher die Coefficienten  $m$  und  $\mu$  zu bestimmen sind. Da die Linie durch den Pol geht, so muss die Gleichung stattfinden

$$\beta = m\alpha + \mu,$$

woraus durch Subtraction sich ergibt:

$$\eta - \beta = m(\xi - \alpha).$$

Der Coefficient  $m$  wird sein  $m = 1: -\frac{dy}{dx}$ , weil diese Linie auf der Tangente senkrecht steht, so dass die Gleichung des Perpendikels gefunden wird:

$$\xi - \alpha = -(\eta - \beta) \frac{dy}{dx}.$$

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung der Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$  kann man schreiben:

$$(\xi - x) \frac{dy}{dx} - (\eta - y) = 0,$$

$$(\xi - \alpha) + (\eta - \beta) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Multipliziert man die erste mit  $\frac{dy}{dx}$  und addirt, so erhält man:

$$(y - \beta) \frac{dy}{dx} + (\xi - x) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \xi - \alpha = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\xi = \frac{\alpha + (\beta - y) \frac{dy}{dx} + x \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Multipliziert man dagegen die zweite mit  $\frac{dy}{dx}$  und subtrahirt, so erhält man:

$$\eta - y + (\eta - \beta) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (x - \alpha) \frac{dy}{dx} = 0,$$

woraus folgt

$$\eta = \frac{y + \beta \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + (\alpha - x) \frac{dy}{dx}}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Nachdem die Coordinaten des Fusspunktes auf diese Weise als Functionen der Veränderlichen  $x$  und  $y$ , und ihrer Ableitungen dargestellt sind, können zwischen diesen Gleichungen und der Curvengleichung

$$f(x, y) = 0$$

die Veränderlichen  $x$  und  $y$  eliminirt werden, so dass man die Fusspunktcurve erhält, ausgedrückt durch eine Gleichung von der Form

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Es ist nicht immer nöthig, die Coordinaten des Fusspunktes zu berechnen, sondern es genügt, die Veränderlichen  $x$  und  $y$  zwischen den Gleichungen der Tangente, des Perpendikels, und der gegebenen Curve zu eliminiren, da aus den beiden ersteren die Werthe für  $\xi$  und  $\eta$  abgeleitet waren.

Die allgemeine Gleichung der Curven zweiten Grades ist

$$ax^2 + by^2 + 2cx = 0,$$

wenn die Abscissenaxe mit der Hauptaxe des Kegelschnitts zusammenfällt, und die Ordinatenaxe durch den Scheitel geht. Aus jener Gleichung folgt

$$x = \frac{-c + \sqrt{c^2 - aby^2}}{a}.$$

Um die Veränderlichen zu eliminiren, setze man sie als Functionen einer dritten Variablen, wodurch elegantere Formeln erhalten werden. Man setze

$$y = \frac{c}{\sqrt{ab}} \sin \varphi,$$

alsdann wird

$$x = \frac{-c + c \cdot \cos \varphi}{a},$$



woraus man durch Differentiiren erhält:

$$dx = -\frac{c}{a} \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \frac{c}{\sqrt{ab}} \cos \varphi d\varphi$$

und

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen des Perpendikels und der Tangente, so gehen diese über in:

$$1) \quad -\sqrt{\frac{a}{b}} (\eta - \beta) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + (\xi - \alpha) = 0,$$

$$2) \quad \eta - \frac{c \cdot \sin \varphi}{\sqrt{ab}} + \left( \xi - \frac{c \cdot \cos \varphi - c}{a} \right) \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = 0;$$

oder, wenn man die erstere mit  $\sqrt{b} \sin \varphi$ , die zweite mit  $\sqrt{ab} \sin \varphi$  multiplicirt:

$$3) \quad -\sqrt{a} (\eta - \beta) \cos \varphi + \sqrt{b} (\xi - \alpha) \sin \varphi = 0,$$

$$4) \quad \eta \sqrt{ab} \sin \varphi + (a\xi + c) \cos \varphi - c = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 4) mit  $\xi - \alpha$ , die Gleichung 3) aber mit  $\eta \sqrt{a}$  und subtrahirt, so erhält man:

$$5) \quad (\xi - \alpha) (a\xi + c) \cos \varphi - c(\xi - \alpha) + a\eta (\eta - \beta) \cos \varphi = 0;$$

und multiplicirt man die erstere mit  $a\xi + c$ , die zweite mit  $\sqrt{a} (\eta - \beta)$  und addirt, so ergibt sich:

$$6) \quad a\eta \sqrt{b} (\eta - \beta) \sin \varphi - c \sqrt{a} (\eta - \beta) + \sqrt{b} (\xi - \alpha) (a\xi + c) \sin \varphi = 0.$$

Aus der Gleichung 5) wird gefunden:

$$\cos \varphi = \frac{c(\xi - \alpha)}{a\eta (\eta - \beta) + (\xi - \alpha) (a\xi + c)},$$

aus der Gleichung 6):

$$\sin \varphi = \frac{c \sqrt{a} (\eta - \beta)}{a \sqrt{b} \eta (\eta - \beta) + \sqrt{b} (\xi - \alpha) (a\xi + c)}.$$

Substituiert man diese beiden Werthe in die Gleichung:

$$\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1,$$

so erhält man

$$\frac{c^2(\xi - \alpha)^2}{\{a\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(a\xi + c)\}^2} + \frac{ac^2(\eta - \beta)^2}{b\{a\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(a\xi + c)\}^2} = 1,$$

oder

$$bc^2(\xi - \alpha)^2 + ac^2(\eta - \beta)^2 = b\{a\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(a\xi + c)\}^2.$$

Die Gleichung für die Fusspunktcuren der Kegelschnitte ist also im Allgemeinen vom vierten Grade; in dem Falle jedoch, dass der Pol im Brennpunkte liegt, wird sie vom zweiten und ersten Grade, was an den einzelnen Kegelschnitten gezeigt werden soll.

## 1. Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel aus dem Scheitel ist

$$y^2 = 2px.$$

Setzt man in derselben  $x = 2p\cos\varphi^2$ , so wird  $y = 2p\cos\varphi$ , so dass man durch Differentiiren erhält:

$$dx = -4p\cos\varphi\sin\varphi d\varphi,$$

$$dy = -2p\sin\varphi d\varphi,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen des Perpendikels und der Tangente, so gehen dieselben über in:

$$1) \quad (\eta - \beta) \frac{1}{2\cos\varphi} + (\xi - \alpha) = 0,$$

$$2) \quad 2\eta\cos\varphi - 2p\cos\varphi^2 - \xi = 0.$$

Aus der Gleichung 1) erhält man

$$\cos\varphi = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha},$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung 2) setzt, so dieselbe über in:

oder

$$2\eta^2\xi + 2\xi\left(\xi - \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

welcher Gleichung genügt wird durch  $\xi = 0$ . In diesem Falle ist also die Fusspunktcurve eine gerade Linie und zwar die Ordinatenaxe selbst. Die Asymptote sollte der Ordinatenaxe parallel und um den halben Parameter vom Pol entfernt sein, fällt also hier ebenfalls mit der Ordinatenaxe zusammen.

Setzt man  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ , so liegt der Pol im Scheitel der Parabel und man erhält die Gleichung

$$2\eta^2\xi + p\eta^2 + 2\xi^3 = 0.$$

Die Asymptote, gegeben durch die Gleichung

$$x_1 = -\frac{p}{2},$$

ist in diesem Fall die Directrix der Parabel. Es werde untersucht, ob diese Curve einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt habe. Schneidet eine Curve sich selbst, so dass ein Doppelpunkt entsteht, so muss es in diesem Punkte zwei Tangenten geben, und da die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der geometrischen Tangente gebildeten Winkels durch den Differentialquotienten  $\frac{dy}{dx}$  ausgedrückt wird, so muss dieser zwei verschiedene Werthe haben. Es muss daher eine quadratische Gleichung gefunden werden, aus welcher sich jene beiden Werthe bestimmen lassen. Wenn die Curve gegeben ist durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

deren partielle Differentialquotienten  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  für zwei zusammengehörige Werthe von  $x$  und  $y$  verschwinden, so nimmt der Differentialquotient  $\frac{dy}{dx}$  oder  $\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  an, so dass es keinen bestimmten Werth der Tangente zu geben scheint. Das vollständige Differential wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Durch abermaliges Differentiiren erhält man eine quadratische Gleichung, aus der man zwei Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  findet. Es wird nemlich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

oder da

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

vorausgesetzt war:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Wenn aus dieser Gleichung sich zwei reelle Werthe für  $\frac{dy}{dx}$  ergeben, so schneidet die Curve sich selbst in dem durch jene zusammengehörigen Coordinatenwerthe angedeuteten Punkte. Ergeben sich zwei gleiche reelle Werthe, so fallen die beiden Tangenten zusammen und die Curve hat einen Rückkehrpunkt oder berührt sich selbst.

Es war die Gleichung gefunden

$$2y^2x + 2x^3 + py^2 = 0,$$

aus durch Differentiiren gefunden wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 + 6x^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4yx + 2py.$$

Diese partiellen Differentialquotienten verschwinden für die zusammengehörigen Werthe  $x=0$ ,  $y=0$ . Die abermalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x + 2p;$$

welche partiellen Differentialquotienten für jene Coordinatenwerthe übergehen in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2p.$$

Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

wird also verwandelt in:

$$2p \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

woraus sich die beiden gleichen Werthe ergeben:

$$\frac{dy}{dx} = \pm 0.$$

Die Curve hat also entweder einen Rückkehrpunkt, oder sie berührt sich selbst.

Es ist der Krümmungshalbmesser zu betrachten, der bekanntlich ist

$$\rho = \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Wenn die Curve sich selbst berührt, so muss  $\rho$  für diesen Punkt einen endlichen Werth behalten und darf auch nicht gleich Null werden. Denn wenn der Krümmungshalbmesser unendlich gross wird, so ist die Curve in jenem Punkte eine gerade Linie, d. h. sie hat einen Inflectionspunkt; wird er dagegen gleich Null, so ist gar keine Krümmung vorhanden, d. h. die Curve hat einen Inflectionspunkt.

Die Gleichung

$$\frac{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = 0$$

wird erfüllt, wenn  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  unendlich wird, während  $\frac{dy}{dx}$  einen endlichen Werth bewahrt. Durch Differentiation der Gleichung

$$2y^2x + 2x^3 + py^2 = 0$$

erhält man

$$1) \quad y(2x + p) \frac{dy}{dx} + y^2 + 3x^2 = 0$$

und durch abermalige Differentiation:

$$2) \quad y(2x + p) \frac{d^2 y}{dx^2} + (2x + p) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \frac{dy}{dx} + 6x = 0.$$

Aus der Gleichung 1) wird gefunden:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 3x^2}{y(2x + p)},$$

welches Differential für jene Coordinatenwerthe  $x=0$ ,  $y=0$  die unbestimmte Form  $\frac{0}{0}$  annimmt. Aus der quadratischen Gleichung war bereits für dasselbe der bestimmte Werth  $\frac{dy}{dx}=0$  gefunden, und wenn man diesen in die Gleichung 2) substituirt, so geht dieselbe über in

$$3) \quad y(2x + p) \frac{d^2y}{dx^2} + 6x = 0.$$

Löst man die Gleichung der Curve

$$2y^2x + 2x^3 + py^2 = 0$$

nach  $y$  auf, so wird

$$y = x \sqrt{\frac{-2x}{2x + p}};$$

dies in die Gleichung 3) substituirt liefert:

$$x \sqrt{-2x(2x + p)} \frac{d^2y}{dx^2} + 6x = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{\sqrt{-2x(2x + p)}}.$$

Setzt man jetzt  $x=0$ , so wird  $\frac{d^2y}{dx^2}$  unendlich, daher der Krümmungshalbmesser gleich Null.

Der Pol ist daher selbst ein Rückkehrpunkt der Curve, und da  $\frac{dy}{dx}$  die trigonometrische Tangente des von der Abscissenaxe und der geometrischen Tangente gebildeten Winkels ist, so folgt, dass dieser Winkel gleich Null und die Abscissenaxe selbst die geometrische Tangente ist.

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen überhaupt die Fusspunktcuren der Parabel einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt haben. Es sind daher die partiellen Differentialquotienten zu bilden. Die allgemeine Gleichung war:

$$2y(y-\beta)(x-\alpha) + p(y-\beta)^2 + 2x(x-\alpha)^2 = 0.$$

Durch Differentiiren erhält man aus derselben:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(y-\beta) + 4x(x-\alpha) + 2(x-\alpha)^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x-\alpha) + 2(y-\beta)(x-\alpha) + 2p(y-\beta);$$

welche partiellen Differentialquotienten für  $x=\alpha$  und  $y=\beta$  schwinden. Durch abermaliges Differentiiren gewinnt man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x + 8(x-\alpha),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(y-\beta) + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x-\alpha) + 2p;$$

welche für jene Werthe übergehen in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\alpha, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\beta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2p;$$

so dass die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

die Form annimmt:

$$4\alpha + 4\beta \frac{dy}{dx} + 2p \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

woraus gefunden wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}}{p}.$$

Ob eine oder zwei oder gar keine reelle Tangente vorhanden ist, das hängt offenbar von der Wurzel  $\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}$  ab. Ist selbe grösser als Null, so giebt es zwei reelle verschiedene Werthe von  $\frac{dy}{dx}$  und somit zwei verschiedene Tangenten, d. h. der Pol ist ein Doppelpunkt; ist dagegen  $\beta^2 - 2p\alpha = 0$ , so erhält man nur eine reelle Tangente und der Pol ist ein Rückkehrpunkt. Ist endlich  $\beta^2 - 2p\alpha$  negativ, so wird die Wurzel imaginär, und

schneiden sich im Pol zwei imaginäre Tangenten, und derselbe ist ein isolirter Punkt. Liegt nun der Pol auf der Parabel, so ist alle Mal  $\beta^2 - 2p\alpha = 0$ , und der Pol ist ein Rückkehrpunkt; dagegen wird  $\beta^2 - 2p\alpha$  positiv, wenn der Pol ausserhalb, negativ wenn er innerhalb der Parabel liegt, was sich folgendermassen beweisen lässt.

Es liege der Pol ausserhalb der Parabel; dann sind nur diejenigen Fälle zu betrachten, wo er auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegt, da für ein negatives  $\alpha$  die Grösse  $\beta^2 - 2p\alpha$  alle Mal positiv wird. Man ziehe die Ordinate  $\beta$ , welche die Parabel in irgend einem Punkte schneiden wird. Die Ordinate dieses Punktes sei  $m$  und es sei ferner  $\beta = m + \gamma$ . Es wird die Gleichung entstehen  $m^2 - 2p\alpha = 0$ . Substituirt man den für  $\beta$  gefundenen Werth, so wird

$$\beta^2 - 2p\alpha = m^2 + 2m\gamma + \gamma^2 - 2p\alpha = 2m\gamma + \gamma^2,$$

welcher Ausdruck immer positiv ist, da  $\gamma$  und  $m$  beide positiv sind.

Es liege der Pol innerhalb der Parabel. Man ziehe wieder die Ordinate  $\beta$  und verlängere sie über den Pol hinaus bis zum Durchschnitt mit der Parabel. Alsdann wird  $\beta = m - \gamma$  zu setzen sein, daher der Ausdruck

$$\beta^2 - 2p\alpha = m^2 + \gamma^2 - 2m\gamma - 2p\alpha,$$

und da auch hier  $m^2 - 2p\alpha = 0$  ist, so wird:

$$\beta^2 - 2p\alpha = \gamma^2 - 2m\gamma.$$

Es ist aber  $\gamma$  ein Theil von  $m$ , daher  $2m\gamma > \gamma^2$ , also wird  $\beta^2 - 2p\alpha$  eine negative Grösse, der Pol ist daher ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt für die Curve, jenachdem er ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt.

Es sollen nun einige dieser Curven quadriert werden. Für den Fall, dass der Pol im Scheitel der Parabel liegt, ist die Gleichung der Fusspunktcurve:

$$2y^2x + py^2 + 2x^2 = 0,$$

woraus man erhält:

$$y = \sqrt{\frac{-2x^3}{p + 2x}}.$$

Da die Ordinate nur dann einen reellen Werth hat, wenn die Abscisse negativ ist, so kann man  $-x$  statt  $x$  schreiben, worauf man erhält:



$$y = \sqrt{\frac{2x^3}{p-2x}}.$$

Bezeichnet  $F$  die Fläche, welche von der Abscissenaxe, der Curve und den Ordinaten  $y_1, y_2$  eingeschlossen wird, so ist, wenn  $x_1, x_2$  die zu jenen Ordinaten gehörigen Abscissen sind:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y dx.$$

In diesem Falle wird daher

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2x^3}{p-2x}} dx.$$

Den zu integrierenden Ausdruck kann man schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{p}{2}x - x^2}} dx,$$

so dass man durch Integration erhält:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y dx = & -\frac{3/4 p + x_1}{2} \sqrt{\frac{p}{2} x_1 - x_1^2} + \frac{3/4 p + x_2}{2} \sqrt{\frac{p}{2} x_2 - x_2^2} \\ & + \frac{3}{32} p^2 \left\{ \arcsin \left( \frac{x_1 - \frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right) - \arcsin \left( \frac{x_2 - \frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Um die zwischen der Abscissenaxe der Curve und der Asymptote liegende Fläche zu berechnen, setze man  $x_1 = 0, x_2 = \frac{p}{2}$ , worauf man gewinnt:

$$\begin{aligned} F &= \frac{3}{32} p^2 \{ \arcsin(-1) - \arcsin(+1) \} \\ &= \frac{3p^2 \pi}{32}, \end{aligned}$$

woraus sich die zwischen der Curve und der Asymptote liegende Fläche ergibt:

$$2F = \frac{3}{16} p^2 \pi.$$

Für  $\alpha = -\frac{p}{2}$ ,  $\beta = 0$  geht die Gleichung der Fusspunktcurve über in:

$$2y^2 \left(x + \frac{p}{2}\right) + py^2 + 2x \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0,$$

woraus man gewinnt:

$$y = \sqrt{\frac{-2x \left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{2 \left(x + \frac{p}{2}\right) + p}} = \left(x + \frac{p}{2}\right) \sqrt{\frac{-x}{x + p}}.$$

Da auch hier die Ordinate nur dann einen reellen Werth bewahrt, wenn die Abscisse negativ ist, so schreibe man  $-x$  statt  $+x$ , so dass man erhält:

$$y = \left(\frac{p}{2} - x\right) \sqrt{\frac{x}{p-x}},$$

woraus folgt:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x \left(\frac{p}{2} - x\right)}{\sqrt{px - x^2}} dx.$$

Dies Integral lässt sich zerlegen, so dass man erhält:

$$\int y dx = \frac{p}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{px - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{px - x^2}}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{x}{\sqrt{px - x^2}} dx = -\sqrt{px - x^2} + \frac{p}{4} \arcsin \left( \frac{x - \frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right),$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{px - x^2}} dx = -\frac{3/4 p + x}{2} \sqrt{px - x^2} + \frac{3p^2}{32} \arcsin \left( \frac{x - \frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right);$$

so, dass man nach Substitution dieser Ausdrücke erhält:

$$\begin{aligned}\int y dx &= -\frac{p}{2} \sqrt{px-x^2} + \frac{p^2}{8} \arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right) - \frac{\frac{3}{4}p+x}{2} \sqrt{px-x^2} \\ &\quad + \frac{3}{32} p^2 \arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{px-x^2} \left(\frac{7}{4}p+x\right) + \frac{7}{32} p^2 \arcsin\left(\frac{x-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}}\right),\end{aligned}$$

und wenn man zwischen den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  integrirt:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} y dx &= -\frac{1}{2} \sqrt{px_1-x_1^2} \left(\frac{7}{4}p+x_1\right) + \frac{1}{2} \sqrt{px_2-x_2^2} \left(\frac{7}{4}p+x_2\right) \\ &\quad + \frac{7}{32} p^2 \left( \arcsin \frac{x_1-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} - \arcsin \frac{x_2-\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} \right).\end{aligned}$$

Da der Pol ausserhalb der Parabel liegt, so muss er, wie oben bewiesen wurde, ein Doppelpunkt der Curve sein. Der halbe Flächeninhalt des geschlossenen Theils der Curve wird mithin gewonnen, wenn man in obiger Formel setzt:  $x_1=0$ ,  $x_2=\frac{p}{2}$ , so dass man erhält:

$$\begin{aligned}F &= \frac{7}{32} p^2 \{ \arcsin(-1) - \arcsin(+1) \} + \frac{9}{8} p^2 \\ &= \frac{7}{32} p^2 \pi + \frac{9}{8} p^2 = \frac{p^2}{8} \left( \frac{7}{4} \pi + 9 \right),\end{aligned}$$

mithin der gesammte Flächeninhalt:

$$2F = \frac{p^2}{4} \left( \frac{7}{4} \pi + 9 \right).$$

## Die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse aus dem Scheitel der grossen Axe ist:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2ab^2x = 0,$$

woraus man erhält:

$$y = \frac{ab + a\sqrt{b^2 - y^2}}{b}.$$

Setzt man  $y = b\sin\varphi$ , so wird  $x = a + a\cos\varphi$ , und wenn man differenziert:

$$dx = -a\sin\varphi d\varphi, \quad dy = b\cos\varphi d\varphi, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi}.$$

Die Gleichung der Tangente geht nach gehöriger Substitution in:

$$(\xi - a - a\cos\varphi) \frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi} + (\eta - b\sin\varphi) = 0,$$

die des Perpendikels in:

$$-(\eta - \beta) \frac{b\cos\varphi}{a\sin\varphi} + (\xi - \alpha) = 0,$$

oder wenn man beide mit  $a\sin\varphi$  multiplicirt:

$$1) \quad -b(\eta - \beta)\cos\varphi + a(\xi - \alpha)\cos\varphi = 0,$$

$$2) \quad a\eta\sin\varphi + b(\xi - a)\cos\varphi - ab = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 2) mit  $\xi - \alpha$ , die Gleichung 1) mit  $\eta$  und subtrahirt, so wird

$$-b\eta(\eta - \beta)\cos\varphi - b(\xi - \alpha)(\xi - a)\cos\varphi + ab(\xi - \alpha) = 0$$

oder

$$3) \quad \{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - a)\}\cos\varphi - a(\xi - \alpha) = 0.$$

Multiplicirt man dagegen die Gleichung 1) mit  $\xi - \alpha$ , die Gleichung 2) mit  $\eta - \beta$  und addirt, so ergibt sich:

$$a(\xi - \alpha)(\xi - a)\sin\varphi + a\eta(\eta - \beta)\sin\varphi - ab(\eta - \beta) = 0$$

oder

$$4) \quad |(\xi - \alpha)(\xi - \alpha) + \eta(\eta - \beta)| \sin \varphi - b(\eta - \beta) = 0.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man:

$$\cos \varphi = \frac{a(\xi - \alpha)}{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - \alpha)},$$

$$\sin \varphi = \frac{b(\eta - \beta)}{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - \alpha)}.$$

Mittelst der Gleichung  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  gewinnt man:

$$\frac{a^2(\xi - \alpha)^2 + b^2(\eta - \beta)^2}{[\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - \alpha)]^2} = 1$$

oder

$$a^2(\xi - \alpha)^2 + b^2(\eta - \beta)^2 = [\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - \alpha)]^2.$$

Die Fusspunkturen der Ellipse werden daher durch eine Gleichung vom vierten Grade ausgedrückt. Diese sind sämtlich geschlossene Curven, da für keinen reellen Werth von  $x$  die Ordinate  $y$  unendlich wird, oder umgekehrt, daher auch niemals Asymptoten vorkommen.

Setzt man in der gefundenen Gleichung

$$\alpha = a - e, \quad \beta = 0,$$

d. h. liegt der Pol in dem Brennpunkte der Ellipse, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades. Es wird nemlich:

$$|(\xi - a + e)(\xi - a) + \eta^2|^2 = a^2(\xi - a + e)^2 + b^2\eta^2.$$

Verlegt man die Coordinatenachsen den früheren parallel in den Brennpunkt, so ist zu substituieren:

$$\xi = x + a - e, \quad \eta = y;$$

worauf man erhält:

$$[x(x - e) + y^2]^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Löst man die Klammern auf, so wird

$$x^4 + e^2x^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ex^3 - 2exy^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$$

und wenn man für  $e^2$  seinen Werth  $e^2 = a^2 - b^2$  substituirt:

$$x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) - 2ex(x^2 + y^2) - b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

woraus folgt:

$$x^2 - 2ex + y^2 = b^2$$

oder

$$(x-e)^2 + y^2 = a^2.$$

Man erhält also die Gleichung eines Kreises, dessen Centrum der Mittelpunkt der Ellipse, dessen Radius die halbe grosse Axe ist.

Wird in der ursprünglichen Gleichung gesetzt  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$ , d. h. liegt der Pol im Scheitel der grossen Axe, so geht die Gleichung über in:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \{y^2 + x(x-a)\}^2,$$

welche eine den Epicycloiden ähnliche Curve darstellt. Fragt man nach dem Flächeninhalt derselben, so wird es bequem sein, Polarcoordinaten einzuführen. Setzt man zu dem Ende

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi;$$

wo  $\rho$  den vom Pol an irgend einen Punkt der Curve gezogenen Radius vector,  $\varphi$  dagegen den Winkel bezeichnet, den dieser mit der Abscissenaxe bildet, so geht die Gleichung über in:

$$a^2\rho^2\cos^2\varphi + b^2\rho^2\sin^2\varphi = (\rho^2 - a\rho\cos\varphi)^2$$

oder

$$b^2\sin^2\varphi = \rho^2 - 2a\rho\cos\varphi.$$

Der Flächeninhalt eines von den beiden Rad. vect.  $\rho_1$  und  $\rho_2$  begrenzten Sectors wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi.$$

Es muss daher  $\rho$  als Function von  $\varphi$  dargestellt werden. Durch Auflösen jener Gleichung ergibt sich

$$\rho = a \cos \varphi + \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

und

$$\rho^2 = 2a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + 2a \cos \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

daher

oder

$$4) \quad \{(\xi - \alpha)(\xi - a) + \eta(\eta - \beta)\} \sin \varphi - b(\eta - \beta) = 0.$$

Aus den Gleichungen 3) und 4) erhält man:

$$\cos \varphi = \frac{a(\xi - \alpha)}{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - a)},$$

$$\sin \varphi = \frac{b(\eta - \beta)}{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - a)}.$$

Mittelst der Gleichung  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  gewinnt man:

$$\frac{a^2(\xi - \alpha)^2 + b^2(\eta - \beta)^2}{\{\eta(\eta - \beta) + (\xi - \alpha)(\xi - a)\}^2} = 1$$

oder

$$a^2(\xi - \alpha)^2 + b^2(\eta - \beta)^2 = \{\eta(\eta - \beta) + (\xi - a)(\xi - \alpha)\}^2.$$

Die Fusspunktcuren der Ellipse werden daher durch eine Gleichung vom vierten Grade ausgedrückt. Diese sind sämtlich geschlossene Curven, da für keinen reellen Werth von  $x$  die Ordinate  $y$  unendlich wird, oder umgekehrt, daher auch keine Asymptoten vorkommen.

Setzt man in der gefundenen Gleichung

$$\alpha = a - e, \quad \beta = 0,$$

d. h. liegt der Pol in dem Brennpunkte der Ellipse, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades. Es wird nemlich:

$$\{(\xi - \alpha + e)(\xi - a) + \eta^2\}^2 = a^2(\xi - a + e)^2 + b^2\eta^2.$$

Verlegt man die Coordinatenachsen den früheren parallel in den Brennpunkt, so ist zu substituieren:

$$\xi = x + a - e, \quad \eta = y;$$

worauf man erhält:

$$\{x(x - e) + y^2\}^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Löst man die Klammern auf, so wird

$$x^4 + e^2x^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 2ex^3 - 2exy^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0,$$

und wenn man für  $e^2$  seinen Werth  $e^2 = a^2 - b^2$  substituirt:

$$x^2(x^2 + y^2) + y^2(x^2 + y^2) - 2ex(x^2 + y^2) - b^2(x^2 + y^2) = 0,$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{a^2 - e^2 z^2}} &= \frac{z \sqrt{a^2 - e^2 z^2}}{3e^2} - \frac{a^2}{2e^2} \int \frac{z dz}{\sqrt{a^2 - e^2 z^2}} \\ &= \frac{1}{3e^2} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} \left( z + \frac{a^2}{2e^2} \right).\end{aligned}$$

Substituiert man auf gehörige Weise, so wird

$$\begin{aligned}a \int \cos \varphi \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi &= \frac{2a^3}{e} \arccos\left(\frac{e}{a} \sin \varphi\right) \\ &\quad - \frac{1}{3} a \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi} \left( \sin \varphi + \frac{a^2}{2e^2} \right).\end{aligned}$$

Daher gewinnt man endlich:

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi = a^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{a^2 + e^2}{8} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) \\ &\quad - \frac{1}{4} (a^2 + e^2) (\varphi_2 - \varphi_1) \\ &\quad - \frac{1}{3} a \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2} \left( \sin \varphi_2 + \frac{a^2}{2e^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} a \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} \left( \sin \varphi_1 + \frac{a^2}{2e^2} \right) \\ &\quad + \frac{2a^3}{e} \left\{ \arccos\left(\frac{e}{a} \sin \varphi_2\right) - \arccos\left(\frac{e}{a} \sin \varphi_1\right) \right\}.\end{aligned}$$

Setzt man nun  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ , so wird

$$\begin{aligned}F &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \varrho^2 d\varphi = a^2 \pi - \frac{1}{4} (a^2 + e^2) \pi \\ &= \frac{1}{4} \pi (3a^2 - e^2).\end{aligned}$$

Da dies die Hälfte des gesamten durch die Curve eingeschlossenen Flächenraumes ist, so wird dieser selbst:

$$2F = \frac{1}{2} \pi (3a^2 - e^2).$$


---



Es sei zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Fusspunktcurven der Ellipse einen Doppel-Rückkehr- oder isolirten Punkt haben. Bildet man die partiellen Differentialquotienten aus der Gleichung

$$\{(x-a)(x-\alpha) + y(y-\beta)\}^2 - a^2(x-\alpha)^2 - b^2(y-\beta)^2 = 0,$$

so erhält man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\{(x-a)(x-\alpha) + y(y-\beta)\}(2x-a-\alpha) - 2a^2(x-\alpha),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\{(x-a)(x-\alpha) + y(y-\beta)\}(2y-\beta) - 2b^2(y-\beta).$$

Diese partiellen Differentialquotienten verschwinden für  $x=\alpha$ ,  $y=\beta$ ; die abermalige partielle Differentiation liefert:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4\{(x-a)(x-\alpha) + y(y-\beta)\} + 2(x-a-\alpha)^2 - 2a^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(2x-a-\alpha)(2y-\beta),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\{(x-a)(x-\alpha) + y(y-\beta)\} + 2(2y-\beta)^2 - 2b^2.$$

Für  $x=\alpha$ ,  $y=\beta$  gehen diese Differentialquotienten über in:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\alpha^2 - 4a\alpha, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2(\alpha-a)\beta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(\beta^2 - b^2).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

so erhält man

$$\alpha^2 - 2a\alpha + 2(\alpha-a)\beta \frac{dy}{dx} + (\beta^2 - b^2) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

woraus man gewinnt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha - (\alpha-a)\beta}}{\beta^2 - b^2}.$$

Der Werth von  $\frac{dy}{dx}$  hängt offenbar von der Wurzel ab; jenachdem die Grösse

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

positiv, negativ, Null ist, giebt es zwei, keine, eine Tangente. Jene Grösse wird aber offenbar Null, wenn der Pol auf der Ellipse liegt, sie wird positiv, wenn der Pol ausserhalb, negativ, wenn er innerhalb der Ellipse sich befindet. Dies lässt sich ähnlich wie bei der Parabel beweisen. Der Pol liege ausserhalb der Ellipse. Man ziehe die Ordinate  $\beta$ , welche grösser wird als die zu der Abscisse gehörige Ordinate der Ellipse  $m$ ; es sei also  $\beta = m + \gamma$ . Ferner wird die Gleichung stattfinden:

$$a^2m^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha = 0.$$

Nachdem der Werth für  $\beta$  substituirt ist, geht der Ausdruck

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

über in

$$a^2m^2 + 2a^2m\gamma + a^2\gamma^2 + b^2\alpha^2 - 2ab^2\alpha$$

oder

$$2a^2m\gamma + a^2\gamma^2,$$

ist mithin positiv. Schneidet die Ordinate  $\beta$  die Ellipse gar nicht, so muss  $\alpha$  entweder negativ oder grösser als  $2a$  sein. In beiden Fällen bleibt der Ausdruck positiv.

Es liege der Pol innerhalb der Ellipse. Man ziehe wieder die Ordinate  $\beta$  und verlängere sie über den Pol hinaus bis zum Durchschnitt mit der Ellipse. Dann wird zu setzen sein

$$\beta = m - \gamma,$$

während

$$a^2m^2 + b^2\alpha^2 - 2b^2a\alpha = 0.$$

Substituirt man den Werth für  $\beta$ , so wird der fragliche Ausdruck übergehen in:

$$a^2(m^2 - 2m\gamma + \gamma^2) + b^2\alpha^2 - 2b^2a\alpha,$$

der sich mit Berücksichtigung obiger Gleichung verwandelt in

$$a^2(\gamma^2 - 2m\gamma)$$

und, da  $\gamma$  ein Theil von  $m$  ist, immer negativ bleibt.

Je nachdem daher der Pol ausserhalb, auf oder innerhalb der Ellipse liegt, ist er für die Fusspunktcurve ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt.

## Der Kreis.

Setzt man in der für die Fusspunktcuren der Ellipse gefundenen Gleichung  $a=b=r$ , so erhält man die Gleichung für die Fusspunktcuren des Kreises:

$$r^2 \{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \} = \{ (x-r)(x-\alpha) + y(y-\beta) \}^2.$$

Setzt man hier  $\alpha=r$ ,  $\beta=0$ , d. h. fällt der Pol in den Mittelpunkt des Kreises, so wird

$$r^2 \{ (x-r)^2 + y^2 \} = \{ (x-r)^2 + y^2 \}^2,$$

woraus man

$$r^2 = (x-r)^2 + y^2,$$

die Gleichung des Kreises selbst, erhält. Setzt man  $\alpha=r$ ,  $\beta=0$ , d. h. liegt der Pol auf der Peripherie des Kreises, so wird die Gleichung der Fusspunktcurve:

$$r^2(x^2+y^2) = \{ x(x-r) + y^2 \}^2,$$

welches die Gleichung der einfachsten Epicycloide, der Cardoide ist.

Um den Flächeninhalt dieser Curve zu bestimmen, ist es bequem, Polarcoordinaten einzuführen. Setzt man  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $x = \rho \cos \varphi$ , so geht die Gleichung über in:

$$r^2 \rho^2 = (\rho^2 - r \rho \cos \varphi)^2$$

oder

$$r^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 - 2r \rho \cos \varphi,$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} \rho &= r \cos \varphi + \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} \\ &= r + r \cos \varphi; \end{aligned}$$

mithin

$$\rho^2 = r^2 + 2r^2 \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi$$

Die Fläche wird daher ausgedrückt durch

$$F = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi + r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi d\varphi \\ + \frac{1}{2} r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi^2 d\varphi,$$

und wenn man die Integrationen ausführt:

$$F = \frac{1}{2} r^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + r^2 (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) \\ + \frac{1}{2} r^2 \left\{ \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) + \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) \right\}.$$

Setzt man  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \pi$ , so erhält man den halben Flächeninhalt der Curve ausgedrückt durch:

$$F = \frac{3}{4} r^2 \pi,$$

mithin den gesamten Flächeninhalt:

$$2F = \frac{3}{2} r^2 \pi.$$

Dasselbe gewinnt man aus der Formel jener oben betrachteten Fusspunktcurve der Ellipse, wenn man in derselben  $e = 0$  setzt.

Da man den Kreis ansehen kann als eine Ellipse mit der Excentricität 0, so gelten hier die für die Fusspunktcurven der Ellipse gefundenen Sätze: die Fusspunktcurven des Kreises sind geschlossene Curven, haben mithin niemals Asymptoten, der Pol ist entweder ein Doppel-Rückkehr- oder isolirter Punkt, jenachdem er ausserhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt.

## Hyperbel.

Da man die Gleichung der Hyperbel aus der Ellipsengleichung erhält, wenn man statt  $b^2$  setzt  $-b^2$ , und  $-a$  statt  $a$ , so gewinnt man durch dieselbe Substitution die Gleichung für die Fusspunktcurven der Hyperbel aus der Gleichung für die Fusspunktcurven der Ellipse. Dieselbe wird:

$$a^2(\xi - \alpha)^2 - b^2(\eta - \beta)^2 = \{(\xi + a)(\xi - \alpha) + \eta(\eta - \beta)\}^2.$$

Setzt man  $\beta = 0$ ,  $\alpha = a - e$ , d. h. verlegt man den Pol in den Brennpunkt, so geht die Gleichung über in:

$$a^2(\xi - a + e)^2 - b^2\eta^2 = \{(\xi + a)(\xi - a + e) + \eta^2\}^2.$$

Verlegt man die Coordinatenachsen in den Brennpunkt, so wird zu setzen sein:

$$\xi = x + a - e, \quad \eta = y;$$

und man erhält:

$$a^2x^2 - b^2y^2 = \{(x + e)x + y^2\}^2,$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$x^4 + 2ex^3 + e^2x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 2exy^2 - a^2x^2 + b^2y^2 = 0.$$

Substituirt man  $e^2 = a^2 + b^2$ , so wird

$$x^4 + 2ex^3 + b^2x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 2exy^2 + b^2y^2 = 0$$

oder

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2ex + b^2) = 0,$$

woraus man gewinnt

$$x^2 + y^2 + 2ex + b^2 = 0,$$

und endlich

$$(x - e)^2 + y^2 = b^2 + e^2 = a^2,$$

die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Hyperbel, dessen Radius die halbe grosse Axe ist.

Setzt man  $\beta = 0$ ,  $\alpha = -a$ , d. h. liegt der Pol im Mittelpunkt der Hyperbel, so erhält man die Gleichung

$$a^2(\xi + a)^2 - b^2\eta^2 = \{(\xi + a)^2 + \eta^2\}^2,$$

und wenn man die Coordinatenaxen in den Mittelpunkt verlegt, so dass zu setzen ist

$$\xi = x - a, \quad \eta = y;$$

so erhält man

$$a^2x^2 - b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Für die gleichseitige Hyperbel, für welche  $a=b$  ist, geht diese Gleichung über in

$$a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2,$$

die Gleichung einer Lemniscate.

Da die allgemeine Gleichung aus der Gleichung für die Fusspunktcurve der Ellipse gewonnen war, so gelten auch hier die über die Fusspunktcurven der Ellipse gefundenen Sätze.

#### Nachschrift des Herausgebers.

Der Herr Verfasser des obigen Aufsatzes schreibt mir, dass sich ein Aufsatz über denselben Gegenstand von Herrn Wolf in Bern im 20sten Bande des Crelle'schen Journals befinde, und dass die von ihm gefundenen Resultate von denen des Herrn Wolf nicht verschieden seien, ja dass selbst der von Herrn Wolf eingeschlagene Weg der kürzere sei. Wenn dies nun aber auch der Fall ist, so scheint mir doch, dass der obige Aufsatz, abgesehen von dem unbestreitbaren Verdienst des Aufsatzes des Herrn Wolf, ein selbstständiges Verdienst besitze, und Anfängern eine gute Uebung in der Anwendung der allgemeinen Formeln der analytischen Geometrie darbieten könne. Daher habe ich von dem von dem Herrn Verfasser mir eingeräumten Rechte, nach Gutdünken über seinen Aufsatz verfügen zu können, Gebrauch gemacht, und denselben in dem Archive abdrucken lassen.

## X.

**Drei geometrische Theoreme.**

Von

**Herrn Doctor Beer**

zu Bonn.

Bei einer dioptrischen Berechnung bin ich zu drei interessanten geometrischen Sätzen gelangt, welche ich mir in der Unterstellung, dass sie neu sind, hier mitzutheilen erlaube, wenngleich ihre Ableitung sehr einfach ist.

## 1.

**Theorem.** Legt man an eine Curve des zweiten Grades und eine Fläche des zweiten Grades, die concentrisch sind, Tangentialebenen, so liegen die Berührungspunkte auf einem den beiden Oertern concentrischen Kegel des zweiten Grades.

**Beweis.** Bei orthogonalen Coordinaten sei die Gleichung eines centrischen Kegelschnittes:

$$C \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0,$$

und die Gleichung einer mit ihm concentrischen Fläche des zweiten Grades:

$$F \equiv \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz - 1 = 0.$$

In dem Punkte  $(x', y', z')$  lege man an letztere eine Tangential-ebene; ihre Gleichung wird:

$$\frac{dF}{dx'} x + \frac{dF}{dy'} y + \frac{dF}{dz'} z - \frac{dF}{dx'} x' - \frac{dF}{dy'} y' - \frac{dF}{dz'} z' = 0.$$

Und sie schneidet die Ebene des Kegelschnittes  $C$  in der Geraden:

$$G \equiv \frac{dF}{dx'} x + \frac{dF}{dy'} y - 2 = 0,$$

wofür wir setzen wollen:

$$px + qy - 2 = 0.$$

Für die Coordinaten der Durchschnitte von  $G$  und  $C$  hat man:

$$x^2(\alpha q^2 + \beta p^2) - (4\beta p)x + (4\beta - q^2) = 0,$$

wofür wir setzen:

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Sollen nun  $G$  und  $C$  sich berühren, so müssen die Wurzeln der letztgefundenen Gleichung einander gleich werden, d. h. es muss sein:

$$B^2 - 4AC = 0,$$

oder:

$$\alpha q^2 + \beta p^2 - 4\alpha\beta = 0,$$

oder:

$$\alpha(by' + dx' + fz')^2 + \beta(ax' + dy' + ez')^2 - \alpha\beta = 0.$$

oder endlich:

$$F' \equiv \frac{(by' + dx' + fz')^2}{\beta} + \frac{(ax' + dy' + ez')^2}{\alpha} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine den Oertern  $C$  und  $F$  concentrische Fläche des zweiten Grades dar, die durch jene Oerter vollständig bestimmt wird. Ihr Durchschnitt mit  $F$  ist der Ort aller Berührungspunkte der an  $C$  und  $F$  gelegten Tangentialebenen. Und diese Punkte liegen hiernach auch auf dem mit  $C$  und  $F$  concentrischen Conus zweiten Grades, der folgende Gleichung hat:

$$F - F' = 0.$$

Hierin liegt aber der Beweis unseres Satzes.



## 2.

**Theorem.** Beschreibt man um die Tangenten eines centriscen Kegelschnittes als Axen Rotationscylinder von demselben Radius und legt durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes an die Cylinder Tangentialebenen, so umhüllen diese einen Kegel des zweiten Grades, so wie auch die im Mittelpunkte auf die Tangentialebenen errichteten Normalen einen Kegelmantel, den Supplementskegel des erst erwähnten, bilden.

**Beweis.** Die Gleichung des centriscen Kegelschnittes sei:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

In dem Punkte  $(x', y', 0)$  lege man eine Tangente an ihn; sie hat die Gleichung:

$$\alpha x x' + \beta y y' = 1.$$

Bedeutet nun  $v$  den Winkel zwischen der Abscissenaxe und dem aus dem Centrum auf die Tangente herabgelassenen Perpendikel, sowie  $n$  die Länge des letzteren, so hat man:

$$x' = \frac{\cos v}{\alpha n}, \quad y' = \frac{\sin v}{\beta n}.$$

Folglich ist auch:

$$\frac{\cos^2 v}{\alpha} + \frac{\sin^2 v}{\beta} = n^2.$$

Um unsere Tangente werde nun ein Rotationscylinder gelegt, für dessen Radius wir der Einfachheit wegen die Längeneinheit nehmen wollen. Die an diesen Cylinder durch den Mittelpunkt der Curve gelegte Berührungs-Ebene schliesse mit der  $xy$ -Ebene den Winkel  $i$  ein; denselben Winkel bildet dann auch das im Centrum auf sie errichtete Perpendikel. Ein Punkt dieses Perpendikels habe die Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$  und seine Entfernung vom Centrum sei  $r$ ; dann ist:

$$x_1 = r \sin i \cos v, \quad y_1 = -r \sin i \sin v, \quad z_1 = r \cos i.$$

Nun ist aber:

$$n \sin i = 1,$$

wir haben also auch:

$$x_1^2 = \frac{r^2}{n^2} \cos v^2, \quad y_1^2 = \frac{r^2}{n^2} \sin v^2.$$

Hieraus und aus der oben für  $v$ ,  $n$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  gefundenen Relation leitet man ab:

$$\frac{x_1^2}{\alpha} + \frac{y_1^2}{\beta} = r^2.$$

Durch den Punkt  $(x_1, y_1, z_1)$  legen wir eine Ebene  $E$  mit der  $xy$ -Ebene parallel; ihr Abstand von der letzteren sei  $d$ ; so ist:

$$r^2 = d^2 + x_1^2 + y_1^2.$$

Sonach ist:

$$x_1^2 \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) + y_1^2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) = d^2.$$

Diese Gleichung gilt für die in der Ebene  $E$  gelegenen Punkte aller Normalen der erwähnten Tangentialebenen. Jene Normalen bilden also einen Conus des zweiten Grades; seine Hauptaxe steht auf dem Kegelschnitte senkrecht, seine Nebenaxen fallen mit den Axen des Kegelschnittes zusammen. Weitere Konsequenzen liegen nahe.

### 3.

**Theorem.** Legt man in den Punkten der Durchschnittslinie zweier Flächen des zweiten Grades mit demselben Mittelpunkte an die eine und andere von ihnen Tangentialebenen, so bilden die vom gemeinsamen Mittelpunkte auf diese Ebenen herabgelassenen Perpendikel zwei Kegel des zweiten Grades.

**Beweis.** Die Gleichungen der Flächen seien:

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad F_2 = 0.$$

Für einen Punkt  $(x', y', z')$  der Durchschnittslinie hat man also:

$$F_1' - F_2' \equiv K' = 0,$$

und  $K'$  ist eine homogene Function vom zweiten Grade, wenn wiederum unterstellt wird, dass das Centrum der betrachteten Oerter der Anfangspunkt der Coordinaten sei. Lassen wir von dem letzteren ein Perpendikel auf die Ebene herab, welche eine der Flächen, z. B.  $F_1$ , in dem Punkte  $(x', y', z')$  berührt, so hat man für die Gleichungen dieses Perpendikels:

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{dF_1'}{dx'}}{\frac{dF_1'}{dy'}}, \quad \frac{z}{y} = \frac{\frac{dF_1'}{dz'}}{\frac{dF_1'}{dy'}}.$$

Die hier rechts stehenden Ausdrücke sind gleichnamige Quotienten aus homogenen linearen Functionen von  $x'$ ,  $y'$  und  $z'$ . Entwickeln wir daher aus den letzten Gleichungen die Verhältniss  $\frac{x'}{y'}$  und  $\frac{z'}{y'}$ , so finden wir dafür gleichnamige Quotienten aus homogenen linearen Functionen von  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Ihre Substitution in die Gleichung  $K'=0$  liefert folglich eine homogene Gleichung des zweiten Grades mit den Variablen  $x$ ,  $y$  und  $z$ , woraus dann folgt, dass die Perpendikel der an die Fläche  $F_1$  gelegten Berührungsebenen einen Kegel des zweiten Grades bilden. Gleiches gilt von  $F_2$  und überhaupt für alle Flächen des zweiten Grades die durch die Durchschnittslinie von  $F_1$  und  $F_2$  gehen, und deren allgemeine Gleichung  $F_1 + \mu F_2 = 0$  ist.

Aus den mitgetheilten drei Problemen leitet sich der folgende bemerkenswerthe dioptrische Lehrsatz ab:

Beschreibt ein Lichtstrahl, der auf eine optisch einaxige, doppeltbrechende Krystallplatte trifft, und das Einfallslot als Axe einen Kegel des zweiten Grades, so beschreiben der ordentlich und ausserordentlich gebrochene Strahl, sowie die Normalen der ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Wellen, ebenfalls einen Kegel des zweiten Grades.

**XI.****Ueber die Quadratur elliptischer  
Sectoren.**

Fortsetzung der Abhandlung Theil XVII. Nr. XI.

Von

dem Herausgeber.

Ausser den in der oben genannten Abhandlung von mir entwickelten Ausdrücken für den Flächeninhalt elliptischer Sektoren, es noch einen anderen sehr bemerkenswerthen Ausdruck des Flächeninhalts eines solchen Sectors, der von Lambert gefunden worden ist, und in naher Beziehung steht zu dem in dem Aufsätze Theil XVI. Nr. XXXIX. entwickelten merkwürdigen Ausdrucke für den Flächeninhalt eines parabolischen Sectors. Lambert erscheint der in Rede stehende Ausdruck für den Flächeninhalt eines elliptischen Sectors als ein Ausdruck für die bei der Bewegung der Planeten um die Sonne, weshalb die Ausdruck bis jetzt auch eigentlich nur in der Astronomie benutzt ist, ohne in die Geometrie, wohin er doch eigentlich gehören, Eingang gefunden zu haben. Ich will daher in diesem Aufsätze versuchen, den Lambert'schen Ausdruck für den Flächeninhalt eines elliptischen Sectors bloss in geometrischem Sinne zu fassen, und in diesem Sinne einen Beweis für denselben zu geben, wobei ich mich an die in dem Aufsätze Theil XVII. Nr. XI. entwickelten Ausdrücke anschliessen werde. Vielleicht wird dadurch bewirkt, dass der in Rede stehende Ausdruck, wie er so verdient, mehr Eingang in die Geometrie findet, als dies jetzt der Fall zu sein scheint.

In Taf. II. Fig. III\*. sei über der Hauptaxe  $AB$  eine Ellipse beschrieben, deren grosse und kleine Halbaxe wir, wie gewöhnlich, durch  $a$  und  $b$  bezeichnen wollen. Der Mittelpunkt dieser Ellipse sei  $C$ , und  $F$  sei ihr einer Brennpunkt.  $F$  und  $C$  wollen wir als die Anfangspunkte zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme der  $xy$  und  $x_1y_1$  annehmen; die positiven Theile der Axen der  $x$  und  $x_1$  seien respective  $FA$  und  $CA$ ; die positiven Theile der Axen der  $y$  und  $y_1$  sollen von  $AB$  an nach oben hin genommen werden. Ueber  $AB$  als Durchmesser denken wir uns einen Kreis beschrieben, und wollen nun in der Ellipse und diesem Kreise zwei Punkte wie  $P$  und  $P_1$  in der Figur annehmen, so nämlich, dass diese Punkte auf derselben Seite von  $AB$  liegen, und die durch sie bestimmte gerade Linie auf  $AB$  senkrecht steht, so dass ihnen also in den beiden obigen Coordinatensystemen dieselben Abscissen entsprechen. Die Coordinaten des Punktes  $P$  in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte  $F$  bezeichnen wir durch  $x, y$ ; die Coordinaten des Punktes  $P_1$  in dem Coordinatensysteme mit dem Anfangspunkte  $C$  mögen durch  $x_1, y_1$  bezeichnet werden. Ziehen wir nun noch die Linien  $FP = r$  und  $CP_1 = a$ , so soll der von der Linie  $FP$  mit dem positiven Theile der Axe der  $x$  eingeschlossene Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der  $x$  an durch den rechten Winkel ( $xy$ ) hindurch von 0 bis  $360^\circ$  zählt, durch  $\varphi$  bezeichnet werden; und eben so wollen wir den von der Linie  $CP_1$  mit dem positiven Theile der Axe der  $x_1$  eingeschlossenen Winkel, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der  $x_1$  an durch den rechten Winkel ( $x_1y_1$ ) hindurch von 0 bis  $360^\circ$  zählt, durch  $\omega$  bezeichnen.

Setzen wir nun wie gewöhnlich

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

und bezeichnen den Flächeninhalt des seine Spitze in  $F$  habenden, dem Winkel  $\varphi$  entsprechenden elliptischen Sectors durch  $S$ , so ist, wie wir in der Abhandlung Theil XVII. Nr. XI. gefunden haben:

$$1) \quad S = \frac{1}{2} ab \left\{ \operatorname{Arccos} \frac{a-r}{c} - \frac{c}{a} \sin \operatorname{Arccos} \frac{a-r}{c} \right\},$$

mit den folgenden Bestimmungen:

Wenn die Grösse

$$\frac{a-r}{c}$$

positiv ist, so muss man

$$0 < \operatorname{Arccos} \frac{a-r}{c} < \frac{1}{2} \pi \quad \text{oder} \quad \frac{3}{2} \pi < \operatorname{Arccos} \frac{a-r}{c} < 2\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^\circ \quad \text{oder} \quad 180^\circ < \varphi < 360^\circ$$

ist; wenn dagegen die Grösse

$$\frac{a-r}{e}$$

negativ ist, so muss man

$$\frac{1}{2}\pi < \text{Arccos} \frac{a-r}{e} < \pi \quad \text{oder} \quad \pi < \text{Arccos} \frac{a-r}{e} < \frac{3}{2}\pi$$

nehmen, jenachdem

$$0 < \varphi < 180^\circ \quad \text{oder} \quad 180^\circ < \varphi < 360^\circ$$

Offenbar ist in völliger Allgemeinheit

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad x_1 = a \cos \omega, \quad y_1 = a \sin \omega;$$

nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten und dem bekannten Satze von der Ellipse ist:

$$x_1 = e + x, \quad y_1 = \frac{a}{b} y.$$

so ist

$$2) \quad a \cos \omega = e + r \cos \varphi, \quad a \sin \omega = \frac{ar}{b} \sin \varphi;$$

aus umgekehrt

$$3) \quad \cos \varphi = \frac{a \cos \omega - e}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} \sin \omega$$

Quadrirt man diese Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$(a \cos \omega - e)^2 + b^2 \sin^2 \omega = r^2$$

r

$$(a^2 - b^2) \cos^2 \omega - 2ae \cos \omega = r^2 - (b^2 + e^2),$$

$$e^2 \cos^2 \omega - 2ae \cos \omega = r^2 - a^2.$$

Löst man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf  $e \cos \omega$  als unbekannte Grösse auf, so ergibt sich

$$e \cos \omega = a \pm r \text{ oder } \cos \omega = \frac{a \pm r}{e},$$

wo aber das obere Zeichen offenbar unzulässig ist, weil immer  $a > e$ , also um so mehr  $a + r > e$ , folglich

$$\frac{a+r}{e} > 1$$

ist. Daher ist in völliger Allgemeinheit:

$$4) \quad \cos \omega = \frac{a-r}{e}.$$

Bezeichnen wir von jetzt an durch  $\omega$  den Kreisbogen in einem mit der Einheit als Halbmesser beschriebenen Kreise, welcher den bisher durch  $\omega$  bezeichneten Winkel misst, und überlegen, dass offenbar immer gleichzeitig

$$0 < \varphi < 180^\circ, \quad 0 < \omega < \pi$$

und

$$180^\circ < \varphi < 360^\circ, \quad \pi < \omega < 2\pi$$

ist, so wird leicht aus dem Vorhergehenden erhellen, dass man in der Formel 1) in völliger Allgemeinheit

$$\operatorname{Arccos} \frac{a-r}{e} = \omega$$

zu setzen hat, und daher aus 1) die folgende völlig allgemein gültige Formel erhält:

$$5) \quad S = \frac{1}{2} ab \left( \omega - \frac{e}{a} \sin \omega \right).$$

Ist jetzt  $r_1$  ein anderer Radius Vector der Ellipse, welchem an dem Mittelpunkte  $C$  der durch den Bogen  $\omega_1$  gemessene Winkel entspricht, und bezeichnen wir den diesem Radius Vector entsprechenden, wie vorher genommenen elliptischen Sector durch  $S_1$ , so ist auf ganz ähnliche Art wie vorher:

$$6) \quad S_1 = \frac{1}{2} ab \left( \omega_1 - \frac{e}{a} \sin \omega_1 \right).$$

Bezeichnen wir aber den dem Radius Vector  $r_1$  am Brennpunkte  $F$  entsprechenden Winkel durch  $\varphi_1$ , und unter der Voraussetzung, dass  $\varphi_1 > \varphi$  ist, den dem Winkel  $\varphi_1 - \varphi$  am Brenn-

Punkte  $F$  entsprechenden elliptischen Sector, welcher von den Vektoren  $r$  und  $r_1$  und dem, dem Winkel  $\varphi_1 - \varphi$  am Brennpunkte entsprechenden elliptischen Bogen begrenzt wird, durch  $S$ ; so ist offenbar  $S = S_1 - S$ , also nach 5) und 6):

$$7) \quad S = \frac{1}{2} ab \left\{ \omega_1 - \omega - \frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) \right\}.$$

Die Sehne der Ellipse, welche die Endpunkte der Vektoren  $r$  und  $r_1$  mit einander verbindet, sei  $s$ ; so erhellt leicht, dass in völliger Allgemeinheit

$$8) \quad s^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\varphi_1 - \varphi),$$

also, wie man leicht findet:

$$9) \quad (r + r_1)^2 - s^2 = 4rr_1 \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)^2$$

Nach 2) ist:

$$r \cos \varphi = a \cos \omega - e, \quad r \sin \varphi = b \sin \omega;$$

$$r_1 \cos \varphi_1 = a \cos \omega_1 - e, \quad r_1 \sin \varphi_1 = b \sin \omega_1;$$

$$rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = (a \cos \omega - e)(a \cos \omega_1 - e) + b b \sin \omega \sin \omega_1.$$

Nach 4) ist

$$r = a - e \cos \omega, \quad r_1 = a - e \cos \omega_1;$$

also

$$rr_1 = (a - e \cos \omega)(a - e \cos \omega_1).$$

Folglich ist

$$2rr_1 \cos \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)^2 = rr_1 \{ 1 + \cos(\varphi_1 - \varphi) \}$$

$$= (a - e \cos \omega)(a - e \cos \omega_1)$$

$$+ (a \cos \omega - e)(a \cos \omega_1 - e) + b b \sin \omega \sin \omega_1$$

$$= aa + e e \cos \omega \cos \omega_1 - ae(\cos \omega + \cos \omega_1)$$

$$+ a a \cos \omega \cos \omega_1 + e e - ae(\cos \omega + \cos \omega_1)$$

$$+ a a \sin \omega \sin \omega_1 - e e \sin \omega \sin \omega_1$$

$$= aa \{ 1 + \cos(\omega_1 - \omega) \} + ee \{ 1 + \cos(\omega_1 + \omega) \} - 2ae(\cos \omega + \cos \omega_1)$$



$$= 2 \left\{ a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 + e e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)^2 \right. \\ \left. - 2ae \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \right\},$$

also

$$r r \cos \frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi)^2 = \{ a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \}^2.$$

Folglich ist nach 9):

$$(r + r_1)^2 - s^2 = 4 \{ a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \}^2;$$

und wenn wir nun der Kürze wegen

$$10) \quad r + r_1 + s = 2p, \quad r + r_1 - s = 2q$$

setzen, so ist:

$$11) \quad pq = \{ a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \}^2.$$

Ferner ist nach 10)

$$p + q = r + r_1,$$

also, weil nach 4)

$$r = a - e \cos \omega, \quad r_1 = a - e \cos \omega_1,$$

ist:

$$p + q = 2a - e(\cos \omega + \cos \omega_1)$$

oder

$$p + q = 2a - 2e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

und folglich

$$4a^2 - 2a(p + q) = 4ae \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Addirt man nun diese Gleichung zu der Gleichung 11), so erhält man

$$4a^2 - 2a(p+q) + pq \\ = |a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)|^2,$$

11)

$$12) \quad (2a-p)(2a-q) = |a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)|^2.$$

Daher haben wir jetzt nach 11) und 12) die beiden folgenden Gleichungen:

$$13) \quad \begin{cases} pq = |a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)|^2, \\ (2a-p)(2a-q) = |a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)|^2; \end{cases}$$

oder eleganter:

$$14) \quad \begin{cases} \left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \left(1 - \frac{a-q}{a}\right) = \left|\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\right|^2, \\ \left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \left(1 + \frac{a-q}{a}\right) = \left|\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\right|^2. \end{cases}$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir die Gleichung:

$$15) \quad \left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\} \left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\} \\ = \left|\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)\right|^2 - \frac{e^2}{a^2} \left|\cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)\right|^2.$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass das Product

$$\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\} \left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}$$

stets eine positive GröÙe, und daher immer zugleich

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2 > 1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2 > 1$$

oder

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2 < 1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2 < 1$$

ist. Wäre aber

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2 > 1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2 > 1;$$

so wäre entweder  $\frac{a-p}{a} > 1$  oder  $\frac{q-a}{a} > 1$ . Im ersten Falle wä

$$a-p > a, \quad q < 0$$

was ungereimt ist, weil nach dem Obigen  $2q = r + r_1 - s$ , und immer  $r + r_1 > s$  ist. Im zweiten Falle wäre

$$q-a > a, \quad q > 2a$$

was wieder ungereimt ist, weil immer  $r < 2a$ ,  $r_1 < 2a$ , also  $r + r_1 < 4a$ , folglich um so mehr  $r + r_1 - s < 4a$ , also  $2q < 4a$ , d. i.  $q < 2a$ . Daher kann nicht

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2 > 1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2 > 1$$

sein, und es ist also nach dem Obigen immer

$$\left(\frac{a-p}{a}\right)^2 < 1, \quad \left(\frac{a-q}{a}\right)^2 < 1;$$

d. h. die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

sind immer kleiner als die Einheit.

Weil nach der Voraussetzung  $\varphi_1 > \varphi$  ist, so ist, wie aus einer einfachen Betrachtung der Figur auf der Stelle erhellet, auch immer  $\omega_1 > \omega$ , und die Differenz  $\omega_1 - \omega$ , so wie natürlich auch die Summe  $\omega_1 + \omega$ , ist daher immer eine positive Grösse.

Weil ferner

$$\begin{aligned}
& \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 - \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)^2 \\
&= \{ \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \} \{ \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) + \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) \} \\
&= 2 \sin \frac{1}{2} \omega \sin \frac{1}{2} \omega_1 \cdot 2 \cos \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} \omega_1 = \sin \omega \sin \omega_1
\end{aligned}$$

ist, so ist die Differenz

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 - \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)^2$$

positiv oder negativ, also

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 > \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)^2 \quad \text{oder} \quad \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 < \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)^2,$$

je nachdem  $\sin \omega$  und  $\sin \omega_1$  gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. je nachdem die beiden Vektoren  $r$  und  $r_1$  auf einer und derselben oder auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe der Ellipse liegen.

Nehmen wir also jetzt an, dass die beiden Vektoren  $r$  und  $r_1$  auf derselben Seite der Hauptaxe der Ellipse liegen, so ist in absoluten Werthen nach

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) > \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Zugleich erhellet aber sehr leicht, dass in diesem Falle immer

$$\omega_1 - \omega < \pi, \quad \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) < \frac{1}{2} \pi$$

also  $\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)$  positiv ist. Weil nun  $a > e$  ist, so ist den absoluten Werthen nach auch

$$a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) > e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

und die erste dieser beiden Grössen ist positiv. Also sind offenbar die Grössen

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

beide positiv, und nach 14) ist folglich:

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) = \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\},$$

$$\frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\}$$

ergibt.

Weil bekanntlich

$$2 \cos(\omega_1 - \omega) = 4 \cos^2 \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) - 2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2 \cos(\omega_1 - \omega) = \left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right) + \left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right) - 2 \\ + 2 \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\} \left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{a-p}{a} \cdot \frac{a-q}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergibt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstatet

$$16) \quad \cos u = \frac{a-p}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich,  $u$  und  $v$  so zu nehmen, dass

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist. Dann ist

$$17) \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

d. i.

$$18) \quad \cos(\omega_1 - \omega) = \cos(u - v).$$

Nach 10) ist

$$r + r_1 + s = 2p, \quad r + r_1 - s = 2q;$$

also  $p > q$ , folglich

$$\frac{a-p}{a} < \frac{a-q}{a},$$

d. i.  $\cos u < \cos v$ ; und weil nun

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist, so ist  $u > v$ , also  $u - v$ , eben so wie  $\omega_1 - \omega$ , positiv. Deshalb ergibt sich aus der Gleichung 18), weil  $\omega_1 - \omega$  und  $u - v$  auch beide zwischen 0 und  $\pi$  liegen:

$$\omega_1 - \omega = u - v.$$

Weil

$$\sin \omega_1 - \sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (u - v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}};$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}};$$

also

$$\sin \frac{1}{2} (u - v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)} \right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

$$= \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)}.$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{a-p}{a} \cdot \frac{a-q}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergibt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstatet

$$16) \quad \cos u = \frac{a-p}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich,  $u$  und  $v$  so zu nehmen, dass

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

Dann ist

$$17) \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

d. i.

$$18) \quad \cos(\omega_1 - \omega) = \cos(u - v).$$

Nach 10) ist

$$r + r_1 + s = 2p, \quad r + r_1 - s = 2q;$$

also  $p > q$ , folglich

$$\frac{a-p}{a} < \frac{a-q}{a},$$

d. i.  $\cos u < \cos v$ ; und weil nun

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist, so ist  $u > v$ , also  $u - v$ , eben so wie  $\omega_1 - \omega$ , positiv. Deshalb ergibt sich aus der Gleichung 18), weil  $\omega_1 - \omega$  und  $u - v$  auch beide zwischen 0 und  $\pi$  liegen:



$$\omega_1 - \omega = u - v.$$

Weil

$$\sin \omega_1 - \sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (u - v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}};$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}};$$

also

$$\sin \frac{1}{2} (u - v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)} \right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

$$= \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)}.$$

Multipliziert man nun, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(u-v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \\ & \quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}, \end{aligned}$$

also:

$$\sin \frac{1}{2}(u-v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \sin u - \sin v,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin u - \sin v.$$

Will nun auch  $\omega_1 - \omega = u - v$  war, so ist nach 7):

$$19) \quad S = \frac{1}{2} ab \{u - v - (\sin u - \sin v)\}.$$

Will man den Inhalt  $E$  der ganzen Ellipse haben, so muss man in dieser Formel

$$r + r_1 = 2a, \quad s = 2a$$

setzen, was  $p = 2a$ ,  $q = 0$  giebt; also ist

$$\cos u = \frac{a-p}{a} = -1, \quad \cos v = \frac{a-q}{a} = +1:$$

folglich

$$u = \pi, \quad v = 0;$$

daher nach 19):

$$\frac{1}{2} E = \frac{1}{2} ab\pi,$$

also

$$20) \quad E = ab\pi,$$

wie bekannt.

Nach 19) und 20) ist

$$S : E = u - v - (\sin u - \sin v) : 2\pi.$$

Weil nun  $u$  und  $v$  mittelst der Formeln 10) und 16) bloss aus  $r + r_1$ ,  $s$  berechnet werden können, ohne  $b$  oder  $e$  zu kennen, kann man auch das Verhältniss  $S : E$  bloss aus der halben Hauptaxe  $a$ , der Summe  $r + r_1$  der beiden Vektoren  $r$  und  $r_1$ , und Sehne  $s$  berechnen, ohne dass man die halbe Nebenaxe  $b$  oder die Excentricität  $e$  zu kennen braucht.

Wenn die beiden Vektoren  $r$  und  $r_1$  auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe der Ellipse liegen, so ist den absoluten Werthen nach

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) < \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Weil in diesem Falle

$$0 < \omega < \pi, \quad \pi < \omega_1 < 2\pi$$

ist, so ist

$$\pi < \omega_1 + \omega < 3\pi, \quad \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) < \frac{3}{2}\pi;$$

also  $\cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$  stets negativ.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass

$$0 < \omega_1 - \omega < \pi, \quad 0 < \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) < \frac{1}{2}\pi;$$

also  $\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)$  positiv sei.

Ist dann den absoluten Werthen nach

$$a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) > e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

so bleibt offenbar Alles wie in dem vorher betrachteten Falle, wenn die beiden Vektoren auf derselben Seite der Hauptaxe der Ellipse liegen, und eine neue Entwicklung der betreffenden Formeln ist daher nicht nöthig.

Wenn aber den absoluten Werthen nach

$$a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

ist; so ist von den beiden Grössen

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

die erste positiv, die zweite negativ. Also ist nach 14):

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\begin{aligned} & \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\}, \end{aligned}$$

$$\frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\}$$

ergiebt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1 - \omega) = 4\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)^2 - 2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1 - \omega) = \left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right) + \left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right) - 2 \\ - 2\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{a-p}{a} \cdot \frac{a-q}{a} - \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergibt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \text{ und } \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstatet

$$21) \quad \cos u = \frac{a-p}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich,  $u$  und  $v$  so zu nehmen, dass

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist. Dann ist

$$22) \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

d. i.

$$23) \quad \cos(\omega_1 - \omega) = \cos(u + v).$$

Hieraus ergibt sich

$$\omega_1 - \omega = u + v \quad \text{oder} \quad \omega_1 - \omega = 2\pi - (u + v).$$

jenachdem

$$0 < u + v < \pi \quad \text{oder} \quad \pi < u + v < 2\pi$$

ist.

Weil

$$\sin \omega_1 - \sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (u + v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}};$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}};$$

also

$$\sin \frac{1}{2} (u + v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} + \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)} \right\};$$

und nach dem Obigen ist:

Ferner wollen wir annehmen, dass

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi, \quad \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \pi;$$

also  $\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$  negativ sei.

Ist dann den absoluten Werthen nach

$$a \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > e \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

so sind die Grössen

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

beide negativ. Also ist nach 14):

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\},$$

$$\frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\}$$

ergibt.

Weil bekanntlich

$$2 \cos(\omega_1 - \omega) = 4 \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 - 2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2 \cos(\omega_1 - \omega) = \left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \left(1 + \frac{a-q}{a}\right) + \left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \left(1 - \frac{a-q}{a}\right) - \\ + 2 \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\} \left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{a-p}{a} \cdot \frac{a-q}{a} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergiebt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \quad \text{und} \quad \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstatet

$$25) \quad \cos u = \frac{a-p}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich,  $u$  und  $v$  so zu nehmen, dass

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist. Dann ist

$$26) \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

d. i.

$$27) \quad \cos(\omega_1 - \omega) = \cos(u - v).$$



Hieraus ergibt sich, weil

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi, \quad 0 < u - v < \pi$$

Ist:

$$\omega_1 - \omega = 2\pi - (u - v).$$

Weil

$$\sin \omega_1 - \sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

Ist, so ist

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2} (u - v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}};$$

$$\sin \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}};$$

also

$$\sin \frac{1}{2} (u - v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)} \right\};$$

und nach dem Obigen ist:

$$2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

$$= - \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \left(1 - \frac{a-q}{a}\right)}.$$

Multiplieirt man nun, so erhält man:

$$\sin \frac{1}{2} (u - v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2},$$

also:

$$\sin \frac{1}{2} (u - v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega) = -(\sin u - \sin v),$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = -(\sin u - \sin v).$$

Weil nun auch  $\omega_1 - \omega = 2\pi - (u - v)$  war; so ist nach 7):

$$28) \quad S = \frac{1}{2} ab \{ 2\pi - (u - v) + (\sin u - \sin v) \}.$$

Wenn den absoluten Werthen nach

$$a \cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) < e \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

oder

$$\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) < \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

ist; so ist von den beiden Grössen

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

die erste positiv, die zweite negativ. Also ist nach 14):

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)},$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) + \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)};$$

woraus sich

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\},$$

$$\frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right)} \right\}$$

ergibt.

Weil bekanntlich

$$2\cos(\omega_1 - \omega) = 4\cos^2 \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) - 2$$

ist, so erhält man aus der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen:

$$2\cos(\omega_1 - \omega) = \left(1 + \frac{a-p}{a}\right)\left(1 + \frac{a-q}{a}\right) + \left(1 - \frac{a-p}{a}\right)\left(1 - \frac{a-q}{a}\right) - 2 \\ - 2\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2\right\}},$$

woraus sich leicht

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \frac{a-p}{a} \cdot \frac{a-q}{a} - \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2}$$

ergibt.

Weil nach dem Obigen die absoluten Werthe der Brüche

$$\frac{a-p}{a} \text{ und } \frac{a-q}{a}$$

kleiner als die Einheit sind, so ist es verstatet

$$29) \quad \cos u = \frac{a-p}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a}$$

zu setzen, und zugleich ist es immer möglich,  $u$  und  $v$  so zu nehmen, dass

$$0 < u < \pi, \quad 0 < v < \pi$$

ist. Dann ist

$$30) \quad \sin u = \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2}, \quad \sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2};$$

also nach dem Obigen

$$\cos(\omega_1 - \omega) = \cos u \cos v - \sin u \sin v,$$

d. i.

$$31) \quad \cos(\omega_1 - \omega) = \cos(u + v).$$

Hieraus ergibt sich

$$\omega_1 - \omega = u + v \quad \text{oder} \quad \omega_1 - \omega = 2\pi - (u + v),$$

jenachdem

$$\pi < u + v < 2\pi \quad \text{oder} \quad 0 < u + v < \pi$$

ist.

Weil

$$\sin \omega_1 - \sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega) \cos \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega)$$

ist, so ist

$$\frac{e}{a}(\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{e}{a}(\sin \omega_1 - \sin \omega) = \sin \frac{1}{2}(u + v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Nun ist aber

$$\sin \frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-p}{a} \right) \right\}};$$

$$\sin \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}},$$

$$\cos \frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ 1 + \left( \frac{a-q}{a} \right) \right\}};$$

also

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}(u + v) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} + \sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)} \right\}; \end{aligned}$$

und nach dem Obigen ist:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) \\ &= -\sqrt{\left( 1 + \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 + \frac{a-q}{a} \right)} - \sqrt{\left( 1 - \frac{a-p}{a} \right) \left( 1 - \frac{a-q}{a} \right)}. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \sin \frac{1}{2}(u+v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) \\
&= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-q}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a-p}{a}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2} \\
&= -\sqrt{1 - \left(\frac{a-p}{a}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{a-q}{a}\right)^2},
\end{aligned}$$

also

$$\sin \frac{1}{2}(u+v) \cdot 2 \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -\sin u - \sin v,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$\frac{e}{a} (\sin \omega_1 - \sin \omega) = -\sin u - \sin v.$$

Weil nun auch  $\omega_1 - \omega = u + v$  oder  $\omega_1 - \omega = 2\pi - (u + v)$  war, je nachdem

$$\pi < u + v < 2\pi \quad \text{oder} \quad 0 < u + v < \pi$$

ist, so ist nach 7):

$$32) \quad \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{1}{2} ab \{ u + v + (\sin u + \sin v) \} \\ \text{oder} \\ S = \frac{1}{2} ab \{ 2\pi - (u + v) + (\sin u + \sin v) \}, \end{array} \right.$$

je nachdem

$$\pi < u + v < 2\pi \quad \text{oder} \quad 0 < u + v < \pi$$

ist.

Wir wollen das Vorhergehende durch einige Beispiele erläutern.

Soll der Flächeninhalt  $E$  der ganzen Ellipse bestimmt werden, so müssen wir

$$r=a-e, \quad r_1=a-e, \quad s=0$$

setzen. Also ist

$$2p=r+r_1+s=2(a-e), \quad p=a-e;$$

$$2q=r+r_1-s=2(a-e), \quad q=a-e;$$

folglich

$$\cos u = \frac{a-p}{a} = \frac{e}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a} = \frac{e}{a};$$

also  $u=v$ . Ferner ist  $\omega=0$ ,  $\omega_1=2\pi$ , also

$$\omega_1 - \omega = 2\pi, \quad \omega_1 + \omega = 2\pi;$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = \pi, \quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \pi;$$

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = -1, \quad \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -1;$$

und daher offenbar den absoluten Werthen nach

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Weil nun, da  $\omega_1 - \omega = 2\pi$  ist, dieser Fall offenbar dem allgemeinen Falle, wenn

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi$$

ist, untergeordnet werden muss, so ist jetzt

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi$$

und den absoluten Werthen nach

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) > \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega).$$

Wir haben also die Formel 28) anzuwenden. Dadurch erhalten wir, weil  $u=v$ ,  $\sin u = \sin v$  ist, auf der Stelle

$$E = \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi, \quad \text{also} \quad E = ab\pi;$$

wie es sein muss.

Wir wollen annehmen, dass die beiden Vektoren  $r$  und  $r_1$  auf der Hauptaxe der Ellipse senkrecht stehen; so ist

$$r = r_1 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{b^2}{a}, \quad s = \frac{2b^2}{a};$$

also

$$2p = r + r_1 + s = \frac{4b^2}{a}, \quad p = \frac{2b^2}{a};$$

$$2q = r + r_1 - s = 0, \quad q = 0;$$

folglich

$$\cos u = \frac{a-p}{a} = 1 - \frac{2b^2}{a^2}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a} = 1;$$

woraus sich

$$u = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right), \quad v = 0$$

ergibt, natürlich  $\operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{2b^2}{a^2}\right)$  zwischen 0 und  $\pi$  genommen.  
Nun ist aber in diesem Falle offenbar

$$\cos \omega = \frac{e}{a}, \quad \sin \omega = \frac{b}{a}.$$

Ferner ist  $\omega_1 = 2\pi - \omega$ , also  $\cos \omega_1 = \cos \omega$ ,  $\sin \omega_1 = -\sin \omega$ .  
folglich

$$\cos \omega_1 = \frac{e}{a}, \quad \sin \omega_1 = -\frac{b}{a}.$$

Weil

$$\omega_1 - \omega = 2\pi - 2\omega, \quad \omega_1 + \omega = 2\pi$$

ist, so ist

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = \pi - \omega, \quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \pi;$$

also

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = -\cos \omega, \quad \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -1;$$

d. i.



$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = -\frac{e}{a}, \quad \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = -1.$$

In diesem Falle ist folglich den absoluten Werthen nach

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega),$$

und weil nun

$$\pi < \omega_1 - \omega < 2\pi$$

ist, so kann man sowohl die Formel 28), als auch die Formel 32) anwenden. Weil aber offenbar

$$0 < u + v < \pi$$

ist, so muss man die zweite der Formeln 32) anwenden. Sowohl aus der Formel 28), als auch aus der zweiten der Formeln 32) erhält man aber

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ 2\pi - \text{Arc cos} \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) + \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2} \right)^2} \right\}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ 2\pi - \text{Arccos} \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) + \frac{2b}{a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\},$$

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ 2\pi - \text{Arccos} \left( 1 - \frac{2b^2}{a^2} \right) + \frac{2eb}{a^2} \right\}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Formeln mit anderen aus der Lehre von der Quadratur der Ellipse sich ergebenden Formeln übereinstimmen, oder wenigstens ohne Schwierigkeit auf dieselben zurückgeführt werden können.

Für den Kreis ist  $a = b$ ,  $e = 0$ ; also

$$S = \frac{1}{2} a^2 \{ 2\pi - \text{Arccos}(-1) \} = \frac{1}{2} a^2 (2\pi - \pi),$$

d. i.  $S = \frac{1}{2} a^2 \pi$ , wie es sein muss, da im vorliegenden Falle das Segment  $S$  offenbar dem Halbkreise gleich ist.

Setzen wir  $r = r_1 = a$ , also  $s = 2b$ , so ist

$$2p = r + r_1 + s = 2a + 2b, \quad p = a + b;$$

$$2q = r + r_1 - s = 2a - 2b, \quad q = a - b;$$

also

$$\cos u = \frac{a-p}{a} = -\frac{b}{a}, \quad \cos v = \frac{a-q}{a} = +\frac{b}{a}.$$

Ferner ist  $\omega = \frac{1}{2}\pi$ ,  $\omega_1 = \frac{3}{2}\pi$ ; also

$$\omega_1 - \omega = \pi, \quad \omega_1 + \omega = 2\pi;$$

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) = \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega) = \pi.$$

Also kann dieser Fall dem allgemeinen Falle, wenn

$$0 < \omega_1 - \omega < \pi$$

ist, untergeordnet werden; und da nun den absoluten Werten nach

$$\cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega) < \frac{e}{a} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega)$$

ist, so muss man die Formeln 24) anwenden. Weil aber offenbar  $u + v = \pi$  ist, so muss es gleichgültig sein, ob man die erste oder die zweite der beiden Formeln 24) anwendet. Die erste Formel giebt

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\}.$$

Die zweite Formel giebt

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ 2\pi - \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\},$$

also wieder

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\}.$$

Das Segment  $S$  besteht in diesem Falle offenbar aus der halben Ellipse und einem gleichschenkligen Dreiecke mit der Grundlinie  $2b$  und der Höhe  $e$ . Also ist nach bekannten Sätzen

$$S = \frac{1}{2} ab\pi + \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot e,$$

i.

$$S = \frac{1}{2} ab\pi + eb.$$

Aber  $e = \sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ; also

$$S = \frac{1}{2} ab\pi + ab\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

oder

$$S = \frac{1}{2} ab \left\{ \pi + 2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \right\},$$

genau wie vorher.

Schon diese wenigen Beispiele werden hinreichen, den Gebrauch der von mir im Vorhergehenden entwickelten Formeln vollständig zu erläutern.



## XII.

# Gleichungen der Bewegung ein Pendels auf der sich um ihre A: drehenden Erde.

Von

Herrn Doctor Haedenkamp,

Lehrer am Gymnasium zu Hamm.

Um den Foucault'schen Versuch, der den directen Beweis Umdrehung der Erde liefern soll, erläutern zu können, habe mir die allgemeinen Formeln der Bewegung eines Pendels, w dabei die Rotation der Erde berücksichtigt wird, entwickelt, theile sie hier mit. Ich habe dabei den Weg verfolgt, den Ga zur Bestimmung des Falles der Körper auf der sich drehen Erde eingeschlagen hat.

### 1.

Seien  $X, Y, Z$  die rechtwinklichen Coordinaten des Punkts  $A$  eines Pendels, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Erde ist, und zwar sei die Axe der  $X$  senkrecht auf Ebene des Aequators und die Axe der  $Y$  senkrecht auf dem gen Meridian, in welchem sich  $A$  im Anfange der Bewegung findet. Für den Aufhängepunkt des Pendels, den wir mit  $B$  zeichnen, sei  $X=X', Y=Y'$  und  $Z=Z'$ . Um nun auch Bewegung des Pendels auf den mit dem Beobachter beweglichen Horizont zu beziehen, seien ferner für dieselben Punkte  $A$  und  $x, y, z$  und  $\alpha, \beta, \gamma$  die Coordinaten auf ein anderes Coordinatensystem.

bezogen, deren Anfangspunkt auch der Mittelpunkt der Erde ist. Wir wollen die Ebene der Axen von  $x$  und  $y$  in der Ebene der Horizont parallel und durch den Mittelpunkt der Erde gehen lassen, und zwar soll die Axe der  $x$  in die Richtung von Norden nach Süden und die der  $y$  in die Richtung von Westen nach Osten fallen;  $z$  fällt also in die Richtung des Vertikalen. Um von dem einen Coordinaten-Systeme zum andern übergehen zu können, setze man

$$X = ax + by + cz,$$

$$Y = a'x + b'y + c'z,$$

$$Z = a''x + b''y + c''z;$$

Es wird auch bekanntlich umgekehrt:

$$x = aX + a'Y + a''Z,$$

$$y = bX + b'Y + b''Z,$$

$$z = cX + c'Y + c''Z.$$

Wenn die Punkte  $A$  und  $B$  kann man ohne Fehler  $X$  mit  $X'$ ,  $Y$  mit  $Y'$  und  $Z$  mit  $Z'$  parallel setzen, so dass auch

$$X' = a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

$$Y' = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma,$$

$$Z' = a''\alpha + b''\beta + c''\gamma.$$

Wenn die Länge des Pendels  $l$  gesetzt wird, so wird noch

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = l^2.$$

Wenn die Grössen  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$ ,  $b$ ,  $b'$  etc. betrifft, so werden diese Grössen, wenn die Länge und Breite der Punkte  $A$  und  $B$  mit  $\nu$  und  $\mu$  bezeichnet werden, folgendermassen ausgedrückt:

$$1) \left\{ \begin{array}{l} a = \sin\mu \cos\psi, \\ a' = \sin\mu \sin\psi, \\ a'' = -\cos\mu; \\ b = -\sin\psi, \\ b' = \cos\psi, \\ b'' = 0; \\ c = \cos\mu \cos\psi, \\ c' = \cos\mu \sin\psi, \\ c'' = \sin\mu. \end{array} \right.$$

Da durch  $\psi$  auch zugleich der Winkel bezeichnet wird, um welchen sich die Erde in der Zeit  $t$  gedreht hat, so kann man auch, wenn  $n$  die Winkelgeschwindigkeit der Drehung der Erde bedeutet,  $\psi = nt$  und also  $\frac{\partial\psi}{\partial t} = n$  setzen.

## 2.

Wir wollen jetzt die Gleichungen, welche die Bewegung des Pendels unter dem Einflusse der Drehung der Erde darstellen, entwickeln. Ich betrachte der Kürze wegen hier das Pendel als ein einfaches. Wenn die Anziehungskraft der Erde in dem Punkte  $A$  oder  $B$  durch  $g$  und der Radius der Erde durch  $r$  bezeichnet wird, dann werden die Kräfte, die auf das Pendel nach den Richtungen  $X, Y, Z$  wirken, durch  $\frac{gX}{r}, \frac{gY}{r}, \frac{gZ}{r}$  ausgedrückt; diese geben in Verbindung mit der Bedingung, dass die Bewegung des Punktes  $A$  nur auf der Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser  $l$  vor sich gehen kann, folgende Fundamentalgleichungen für die Bewegung:

$$0 = \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \frac{gX}{r} + \frac{N(X-X')}{l},$$

$$0 = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{gY}{r} + \frac{N(Y-Y')}{l},$$

$$0 = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{gZ}{r} + \frac{N(Z-Z')}{l}.$$

Um die Bewegung des Pendels gegen die im Raume bewegliche Ebene des Horizonts kennen zu lernen, müssen in diesen

Gleichungen die Grössen  $X, Y, Z$  durch  $x, y, z$  ausgedrückt werden. Zu diesem Ende multiplizire man die erste dieser Gleichungen mit  $a$ , die zweite mit  $a'$ , die dritte mit  $a''$  und addire; dann multiplizire man ferner dieselben drei Gleichungen mit  $b, b', b''$  und endlich mit  $c, c', c''$  und addire jedesmal; dadurch erhält man statt der vorhergehenden diese drei Gleichungen:

$$2) \quad \begin{cases} 0 = a \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + a' \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + a'' \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{gx}{r} + \frac{N(x-\alpha)}{l}, \\ 0 = b \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + b' \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b'' \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{gy}{r} + \frac{N(y-\beta)}{l}, \\ 0 = c \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + c' \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + c'' \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{gz}{r} + \frac{N(z-\gamma)}{l}. \end{cases}$$

Jetzt drücken wir mittelst der Gleichungen 1) die Werthe für  $\partial^2 X, \partial^2 Y, \partial^2 Z$  durch  $x, y, z, a, b, c$  u. s. w. und deren Differentiale aus: setzt man dann die erhaltenen Werthe für  $\partial^2 X$  u. s. w. in die Gleichungen 2), so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$3) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2n \sin \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{g'x}{r} - n^2 \cos \mu Z + \frac{N(x-\alpha)}{l}, \\ 0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2n \sin \mu \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + 2n \cos \mu \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{g'y}{r} + \frac{N(y-\beta)}{l}, \\ 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2n \cos \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{g'z}{r} + n^2 \sin \mu Z + \frac{N(z-\gamma)}{l}. \end{cases}$$

Der Kürze wegen ist  $g - rn^2 = g'$  gesetzt und bedeutet die wirkliche Schwere unter dem Aequator. Wollte man die Abplattung der Erde noch berücksichtigen, so müsste

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \mu}{a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{b^2}$$

gesetzt werden. Ich bemerke noch, dass  $n^2 \sin \mu Z$  die Schwingkraft für die Breite  $\mu$  nach der Richtung der Schwere und  $n^2 \cos \mu Z$  die nach der Richtung des Meridians zerlegt, bedeutet; beide Kräfte sind also hier kleine Grössen. Ist, wie wir hier annehmen, die Erde eine Kugel, dann ist auch noch  $\alpha = 0, \beta = 0$ .

Die Grössen  $\frac{x}{r}$  und  $\frac{y}{r}$  kann man in den vorhergehenden Gleichungen ohne Fehler vernachlässigen und  $\frac{z}{r}$  gleich 1 setzen; dadurch werden dieselben folgende:

$$4) \quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2n \sin \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - n^2 \cos \mu Z + \frac{Nx}{l}, \\ 0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2n \sin \mu \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + 2n \cos \mu \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{Ny}{l}, \\ 0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - 2n \cos \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + g' + \frac{Nz}{l}. \end{cases}$$

Hierin ist für  $z - \gamma$  noch  $z$  und

$$g'' = g' + n^2 \sin \mu Z = g - rn^2 \cos^2 \mu$$

gesetzt, und es bedeutet  $g''$  die wirkliche Schwere im Punkte  $A$  oder  $B$ , da  $rn^2 \cos^2 \mu$  die Schwerkraft nach der der Schwere entgegengesetzten Richtung ist. Diese Gleichungen integriert beantworten alle Fragen, die man über die Bewegung eines Pendels auf der rotirenden Erde stellen kann. Indessen sind diese Integrale in endlicher Form nicht zu erhalten, obgleich ein Integral nemlich

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{2 \partial t^2} = g'' z - n^2 \cos \mu Z x + C,$$

sich leicht aus 4) ergibt. Hier kommt es zunächst nur darauf an, die Grösse der Drehung der Schwingungsebene, wie sie beim Foucault'schen Versuche beobachtet wird, kennen zu lernen. Der Einfachheit wegen wollen wir annehmen, dass für  $t=0$  der Schwerpunkt des Pendels in der Ebene des Meridians liege, und die Geschwindigkeit  $=0$  sei. Multipliziert man nun die erste der Gleichungen 4) mit  $y$  und die zweite mit  $x$  und subtrahirt, so erhält man:

$$\partial \left( \frac{y \partial x - x \partial y}{\partial t^2} \right) = n \sin \mu \frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial t} + 2n \cos \mu x \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Die Projection der Pendellänge auf die Ebene des Horizonts sei  $\rho$  und bilde mit den Axen  $x$  und  $y$  die Winkel  $\varphi$  und  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ , so dass also:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

und

$$y \partial x - x \partial y = \rho^2 \partial \varphi:$$

dann ist

$$\partial \left( \frac{\rho^2 \partial \varphi}{\partial t^2} \right) = n \sin \mu \frac{\partial \rho^2}{\partial t} + 2n \cos \mu x \frac{\partial z}{\partial t}.$$



und

$$5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = n \sin \mu + \frac{2n \cos \mu}{\rho^2} \int x \partial z.$$

Sind die Schwingungen des Pendels klein, so dass  $\partial z = 0$  gesetzt werden kann, so hat man

$$\varphi = nt \cdot \sin \mu.$$

In diesem Falle kann man also die Drehung der Schwingungsebene des Pendels der Zeit proportional setzen, und während die Schwingungsebene sich um  $360^\circ$  dreht, dreht sich die Erde um den Winkel

$$\frac{2\pi}{\sin \mu}.$$

Wir sehen aus der Gleichung 5), dass bei grösseren Schwingungsbogen die Geschwindigkeit, womit die Schwingungsebene sich dreht, nicht ganz constant sei, sondern um die periodische Grösse

$$\frac{2n \cos \mu}{\rho^2} \int x \partial z$$

grösser oder kleiner als  $n \sin \mu$  werden kann. Für eine kurze Dauer der Schwingungen kann man, wie leicht zu sehen,

$$\int x \partial z = \cos \varphi \int \rho \partial z$$

setzen. Hieraus folgt, dass bei gleichen Schwingungsbogen für  $+\varphi$  und  $-\varphi$  die Geschwindigkeit der Drehung der Schwingungsebene gleich sei. Finden die Schwingungen in der auf dem Meridian senkrechten Richtung statt, so ist

$$\cos \varphi \int \rho \partial z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = n \sin \mu.$$

Wenn die grösste Abweichung des Pendels vom Lothe durch  $u$  bezeichnet wird, dann ist näherungsweise für eine ganze Schwingung:

$$\frac{2n \cos \mu \cos \varphi}{\rho^2} \int x \partial z = \frac{n \cos \mu \sin u}{3} \cdot \cos \varphi;$$

diese Grösse ist zwar gegen  $n \sin \mu$  klein, genaue Versuche aber mit dem Foucault'schen Pendel könnten doch dieselbe noch vielleicht herausstellen.

## Nachschrift des Herausgebers.

Bei Uebersendung des obigen Aufsatzes schreibt mir Herr Doctor Haedenkamp Folgendes, was ich hier noch mitzutheilen für meine Pflicht halte, indem ich zugleich dem geehrten Herrn Verfasser für die Uebersendung seines Aufsatzes danke, und mich freue, dass mein eigener Aufsatz über diesen Gegenstand im ersten Hefte dieses Bandes den Hauptzweck, welchen ich bei Mittheilung desselben hatte, nämlich die Mittheilung weiterer Untersuchungen über den schönen Foucault'schen Versuch zu veranlassen, schon erfüllt hat. Möge die obige Mittheilung nicht die letzte sein!

„So eben erhalte ich von Ihrem Journal das Hest, welches die Abhandlung von Ihnen über den Foucault'schen Versuch enthält. Bei Durchlesung derselben fiel mir meine schon vor  $\frac{1}{2}$  Jahr gemachte und schon fast vergessene Abhandlung ein, die ich über denselben Gegenstand geschrieben. Da ich nun keine andere Auflösung als die Ihrige und die von Eschweiler kenne und meine Lösung des Problems eine ganz andere ist, so glaube ich, dass dieselbe Interesse hat, und übermache sie Ihnen hierneben mit der Bitte, solche in Ihr Journal bald möglichst einrücken lassen zu wollen. Zugleich ersuche ich Sie, mir einige besondere Abdrücke der Abhandlung demnächst auf geeignetem Wege zukommen zu lassen. Sie werden sehen, dass, wie ich gefunden, die Drehung der Schwingungsrichtung gegen den Horizont nicht ganz constant, sondern von einem, wenn auch kleinen periodischen Gliede noch abhängig ist. Dieses kleine Glied müsste sich, wenn die Versuche mit möglichster Schärfe angestellt würden, herausstellen. Ich kenne keinen andern Versuch, bei dem sich dieses in der That wirklich herausgestellt hätte, als den in Minden gemachten.“

Die Herren Physiker, welche sich mit Foucault'schen Pendelversuchen beschäftigen würden, also hierauf besonders zu achten haben.

# XIII.

## Miscellen.

---

### Beitrag zur Buchstabenrechnung.

Von Herrn Professor G. Decher an der polytechnischen Schule zu Augsburg.

Bisher hat man sich in den Lehrbüchern der Algebra darauf beschränkt, nur solche zweigliedrige irrationale Nenner rational zu machen, deren Wurzelgrößen Potenzen von 2 zu Exponenten haben, wie

$$\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}, \quad \frac{a}{\sqrt[4]{b} \pm \sqrt[4]{c}}, \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}}, \quad \text{u. s. f.}$$

Das Verfahren besteht bekanntlich darin, den Zähler und Nenner mit der Differenz oder Summe der Wurzelgrößen des Nenners zu multiplizieren, je nachdem dieser selbst eine Summe oder eine Differenz ist. Mit Nennern von der Form

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b} \pm \sqrt[3]{c}}, \quad \frac{a}{\sqrt[5]{b} \pm \sqrt[5]{c}}, \quad \text{u. s. w.}$$

hat man sich nicht befasst. Das vorhergehende Verfahren ist

aber in einem allgemeineren enthalten, durch welches alle binome Nenner rational gemacht werden können.

Beachtet man nämlich, dass, wenn  $n$  eine ganze Zahl ist, der Quotient von

$\frac{a^n - b^n}{a - b}$  immer eine geschlossene Reihe gibt; von

$\frac{a^n - b^n}{a + b}$  nur, wenn  $n$  eine gerade Zahl ist; von

$\frac{a^n + b^n}{a + b}$  nur, wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist; von

$\frac{a^n + b^n}{a - b}$  dagegen niemals;

so wird man leicht finden, dass man den Bruch  $\frac{a}{\frac{2n}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}}$  im Zähler und Nenner nur mit  $b - c$  multiplizieren darf, um den irrationalen Nenner zu beseitigen; denn man hat

$$\begin{aligned} \frac{a}{\frac{2n}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}} &= \frac{a}{b - c} \cdot \frac{b - c}{\frac{2n}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}} \\ &= \frac{a}{b - c} \left( \sqrt[2n]{b^{2n-1}} \mp \sqrt[2n]{b^{2n-2}c} + \text{etc.} + \sqrt[2n]{bc^{2n-2}} \mp \sqrt[2n]{c^{2n-1}} \right). \end{aligned}$$

Ebenso wird der Nenner des Bruches  $\frac{a}{\frac{2n+1}{\sqrt{b} - \sqrt{c}}}$  rational werden,

wenn man Zähler und Nenner mit  $b - c$  multipliziert; der Nenner

des Bruches  $\frac{a}{\frac{2n+1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}}$ , wenn man Zähler und Nenner mit  $b + c$

multipliziert; man hat also

$$\begin{aligned} \frac{a}{\frac{2n+1}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}} &= \frac{a}{b \pm c} \cdot \frac{b \pm c}{\frac{2n+1}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}} \\ &= \frac{a}{b \pm c} \left( \sqrt[2n+1]{b^{2n}} \mp \sqrt[2n+1]{b^{2n-1}c} + \text{etc.} \mp \sqrt[2n+1]{bc^{2n-1}} + \sqrt[2n+1]{c^{2n}} \right). \end{aligned}$$

Um endlich den Nenner des Bruches  $\frac{a}{\sqrt[m]{b} \pm \sqrt[n]{c}}$  rational zu machen, verwandelt man die Wurzelgrößen in solche mit gleichen Exponenten, und hat dadurch den Ausdruck:

$$\frac{\frac{a}{\sqrt[m]{b} \pm \sqrt[n]{c}}}{\sqrt[m]{b} \pm \sqrt[n]{c}} = \frac{a}{\sqrt[mn]{b^n} \pm \sqrt[mn]{c^m}},$$

welcher wieder auf einen der vorhergehenden Fälle zurückkommt.

Durch dieses Verfahren kann demnach jeder binome irrationale Nenner unmittelbar rational gemacht werden, und es ist dabei nicht nothwendig, vierte Wurzeln erst in zweite, u. s. f. zu verwandeln.

## Bemerkung zu Eulers Integralrechnung.

Von Herrn Professor Dr. Wolfers zu Berlin.

In Eulers Institutionum calculi integralis volumen primum. §. 233. findet sich folgende Stelle: Veluti si proponeretur haec formula

$$\frac{e^x x \partial x}{(1+x)^2},$$

facile est suspicari integrale, si datur, talem formam esse habiturum:

$$\frac{e^x z}{1+x}.$$

Hujus ergo differentiale

$$\frac{e^x \{ \partial z(1+x) + xz \partial x \}}{(1+x)^2}$$

cum illo comparatum dat:

$$\partial z(1+x) + xz \partial x = x \partial x,$$

ubi statim patet esse  $z=1$ , quod nisi per se pateret, ex regulis difficulter cognosceretur.

Nun scheint es mir, als ob das vorgelegte Differential ziemlich direct integrirt werden kann, und zwar folgendermassen: Ich setze zur Vereinfachung  $1+x=z$ , also  $x=z-1$  und  $\partial x=\partial z$ ; alsdann wird, wenn ich das gesuchte Integral durch  $y$  bezeichne:

$$y = \int \frac{e^{z-1}(z-1)\partial z}{z^2} = \int e^{z-1} \frac{\partial z}{z} - \int e^{z-1} \frac{\partial z}{z^2},$$

also, weil  $\frac{\partial z}{z} = \partial \cdot \log z$  und  $\frac{\partial z}{z^2} = -\partial \cdot \frac{1}{z}$  ist, durch theilweise Integration:

$$y = e^{z-1} \cdot \log z - \int \log z \cdot e^{z-1} \partial z + \frac{e^{z-1}}{z} - \int \frac{1}{z} e^{z-1} \partial z,$$

und da wieder

$$\int \frac{1}{z} e^{z-1} \partial z = e^{z-1} \cdot \log z - \int \log z \cdot e^{z-1} \partial z:$$

$$\begin{aligned} y &= e^{z-1} \cdot \log z - \int \log z \cdot e^{z-1} \partial z + \frac{e^{z-1}}{z} - \{ e^{z-1} \log z - \int \log z \cdot e^{z-1} \partial z \} \\ &= \frac{e^{z-1}}{z} = \frac{e^x}{1+x}. \end{aligned}$$

### Druckfehler.

In Theil XX. S. 11 Z. 9. lese man Ganzzahl,

S. 14. Z. 6. lese man scheiden,

S. 15. Z. 19. für  $\frac{du}{du}$  lese man  $\frac{du}{dx}$ ,

S. 23. Z. 3. fehlt (17),

S. 25. Z. 3. nach Werthe fehlt begrenzter Integrale,

S. 30. Z. 16. und 18. statt  $du$  setze man  $\frac{du}{u}$ ,

S. 30. Z. 18. statt  $+1-(+1)$  setze man  $1(+1)-1(+1)$ .

# XIV.

## U e b e r L e i t l i n i e n .

Von

Herrn Doctor M. Cantor

in Heidelberg.

Der Name Leitlinie oder Directrix ist von verschiedenen Mathematikern in verschiedener Bedeutung benutzt worden. Wir fassen ihn hier in derselben Bedeutung wie Raabe in einem Aufsätze im zweiten Bande von Crelle's Journal, der folgende Definition giebt: Leitlinie einer gegebenen krummen Linie ist diejenige Linie, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Normale, welche von irgend einem Punkte jener Curve auf sie gefällt wird, gleich der Entfernung jenes Punktes von einem gegebenen festen Punkte der Ebene ist. An diese Definition uns anschliessend wollen wir hier die Untersuchung aufnehmen, und neben einigen interessanten Einzelheiten namentlich noch allgemeine Formeln in Bezug auf Polarcoordinaten mittheilen, so wie auch eine Erweiterung des Begriffes, der zu Leitflächen führt, andeuten.

### 1.

Wir wollen zur deutlicheren Verständniss die Curve, deren Leitlinie in dem eben angegebenen Sinne eine andere Curve ist, immer die Curve ohne weitere Bezeichnung nennen; ferner werden wir für alle Grössen, die sich auf die Curve beziehen, lateinische Buchstaben gebrauchen, für alle Grössen aber, die sich auf die Leitlinie beziehen, griechische Buchstaben.

Um möglich einfache Formeln zu erhalten, nehmen wir den gegebenen festen Punkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und in Beziehung auf dieses seien die Gleichungen der Leitlinie und der Curve:

$$1. \quad \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

$$2. \quad f(x, y) = 0.$$

Die Normale zur Leitlinie, welche zugleich durch einen Punkt  $x, y$  geht, hat die Gleichung

$$3. \quad (y - \eta) \frac{d\eta}{d\xi} + (x - \xi) = 0.$$

Und endlich ist die Entfernung der Punkte  $x, y$  und  $\xi, \eta$  der Entfernung des Punktes  $x, y$  vom Coordinatenanfangspunkte gleich zu setzen, d. h.  $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$  oder

$$4. \quad \xi^2 + \eta^2 = 2(\xi x + \eta y).$$

2.

Nun sind zwei Aufgaben möglich. Entweder die Leitlinie ist gegeben (Gleichung 1.) und man sucht die zugehörige Curve (Gleichung 2.) oder umgekehrt. Die erste Aufgabe ist eine ganz bestimmte, indem aus 1. der Differentialquotient  $\frac{d\eta}{d\xi}$  gesucht und in 3. substituiert wird, worauf zwischen der so umgewandelten Gleichung 3., der Gleichung 1. und der Gleichung 4. die Unbekannten  $\xi, \eta$  eliminirt werden können; und die übrig bleibende Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  ist die gesuchte Gleichung 2.

Auch geometrisch kann man sich die Bestimmtheit dieser Aufgabe leicht versinnlichen. Denn es sei  $o$  in Taf. III. Fig. 1. der feste Coordinatenanfangspunkt und  $\mu$  ein Punkt der Leitlinie  $\alpha\beta$ , man sucht den zugehörigen Punkt  $m$  der Curve. Die Auflösung besteht einfach darin, dass man in  $\mu$  an  $\alpha\beta$  die Normale  $\mu\mu'$  zieht, ferner die Verbindungslinie  $\mu o$  und in deren Mitte die Senkrechte  $\delta\delta'$  errichtet. Der Durchschnittspunkt der  $\delta\delta'$  mit der  $\mu\mu'$  ist der gesuchte Punkt  $m$ .

Anders verhält es sich, wenn die umgekehrte Aufgabe gestellt ist, nämlich zu einer gegebenen Curve die Leitlinie zu finden. Denn ist (Taf. III. Fig. 2.)  $ab$  die Curve, so ist zur Bestimmung des Punktes  $\mu$  nur die Bedingung  $mo = m\mu$  gegeben, d. h. der Ort des Punktes  $\mu$  ist die Peripherie des um  $m$  mit dem Halbmesser  $mo$  beschriebenen Kreises, oder es giebt unendlich viele Leitlinien, die einer Curve zugehören. Die weitere Bedingung, dass  $m\mu$  zur Leitlinie normal sein soll, kommt allerdings auch in Betracht; aber bei dem ersten Punkte der Curve,



zu welchem der entsprechende Punkt der Leitlinie gesucht wird, ist es jedenfalls ganz willkürlich, wohin wir in der Peripherie des erwähnten Kreises  $\mu$  verlegen. Indessen wird die ganze Schaar der Leitlinien stetig auf einander folgen und dem gemäss in der Regel eine einhüllende Linie haben, die alsdann selbst auch Leitlinie der Curve ist. Denn jeder ihrer Punkte ist zugleich Punkt einer Leitlinie, welche sie tangirt, mit welcher sie also eine gemeinschaftliche Normale hat.

Zu derselben Bemerkung gelangen wir auch analytisch. Sind nämlich die Gleichungen 2., 3., 4. gegeben, so folgt aus 3. und 4., wenn zur Abkürzung  $\frac{d\eta}{d\xi} = \eta'$  gesetzt wird:

$$5. \quad x = \frac{(\eta^2 - \xi^2)\eta' + 2\xi\eta}{2(\eta - \xi\eta')}, \quad y = \frac{(\eta^2 - \xi^2) - 2\xi\eta\eta'}{2(\eta - \xi\eta')};$$

und durch Substitution in 2.:

$$f\left(\frac{(\eta^2 - \xi^2)\eta' + 2\xi\eta}{2(\eta - \xi\eta')}, \frac{(\eta^2 - \xi^2) - 2\xi\eta\eta'}{2(\eta - \xi\eta')}\right) = \psi(\xi, \eta, \eta') = 0,$$

welches die Differentialgleichung der gesuchten Leitlinie ist. Bei deren Integration erscheint nun eine willkürliche Constante, welche, als veränderlicher Parameter angesehen, unendlich viele Leitlinien giebt. Im Allgemeinen wird sich aber ausser dem allgemeinen Integral:  $\varphi(\xi, \eta, \text{const.}) = 0$  auch noch ein singuläres Integral  $\varphi_1(\xi, \eta) = 0$  ergeben, welches keinen veränderlichen Parameter mehr enthält; und dessen Bedeutung ist alsdann bekanntlich die Einhüllende der durch das allgemeine Integral angegebenen krummen Linien.

### 3.

Schon der Umstand, dass die Entfernung eines Punktes vom Coordinatenanfangspunkte zum Ausdrucke eines wesentlichen Theiles unserer Aufgabe dient, scheint darauf hinzudeuten, dass es angemessener wäre zu Polarcoordinaten überzugehen; und in der That treten dabei weit einfachere Formeln hervor. Zum Pole der neuen Coordinaten nehmen wir wieder den festen Punkt, d. h. den früheren Coordinatenanfangspunkt, und zur Achse die frühere Abscissenachse. Nun ist, wenn  $\varrho, \theta; r, t$  die neuen Coordinaten bezeichnen sollen:

$$\xi = \varrho \cdot \cos \theta, \quad \eta = \varrho \cdot \sin \theta, \quad \varphi(\xi, \eta) = \Phi(\varrho, \theta);$$

$$x = r \cdot \cos t, \quad y = r \cdot \sin t, \quad f(x, y) = F(r, t).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 1. bis 4. und schreibt  $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$ , so ist:

$$6. \quad \Phi(\rho, \theta) = 0,$$

$$7. \quad F(r, t) = 0,$$

$$8. \quad \rho'(\rho - r \cdot \cos(t - \theta)) = \rho \cdot r \cdot \sin(t - \theta),$$

$$9. \quad \rho = 2r \cdot \cos(t - \theta).$$

Durch Verbindung der Gleichungen 8., 9. ist

$$\rho' \left( \rho - \frac{\rho}{2} \right) = \rho \cdot r \cdot \sin(t - \theta)$$

oder

$$10. \quad \rho' = 2r \cdot \sin(t - \theta).$$

Aus 9. und 10. ergeben sich alsdann die Zusammenhänge:

$$11. \quad \frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg}(t - \theta),$$

$$12. \quad \rho'^2 + \rho^2 = 4r^2;$$

worauf man aus 11. noch folgende Gleichung ableiten kann:

$$13. \quad \operatorname{tgt} = \frac{\rho' + \rho \cdot \operatorname{tg}\theta}{\rho - \rho' \cdot \operatorname{tg}\theta}.$$

Die Gleichungen 9., 10. können auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\rho = 2r \cdot \cos t \cdot \cos \theta + 2r \cdot \sin t \cdot \sin \theta,$$

$$\rho' = -2r \cdot \cos t \cdot \sin \theta + 2r \cdot \sin t \cdot \cos \theta.$$

Wird einmal die obere mit  $\sin \theta$ , die untere mit  $\cos \theta$ , und das andere Mal die obere mit  $\cos \theta$ , die untere mit  $\sin \theta$  multiplicirt und die Producte mit einander verbunden, so ergibt sich:

$$\sin \theta \cdot \rho + \cos \theta \cdot \rho' = 2r \cdot \sin t,$$

$$\cos \theta \cdot \rho - \sin \theta \cdot \rho' = 2r \cdot \cos t.$$

Aber  $2r \cdot \sin t = 2y$ ,  $2r \cdot \cos t = 2x$ . Folglich ist:

$$14. \quad y = \frac{\sin \theta \cdot \rho + \cos \theta \cdot \rho'}{2}, \quad x = \frac{\cos \theta \cdot \rho - \sin \theta \cdot \rho'}{2};$$

eine Formel von grosser Geschmeidigkeit, um zu einer in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Curve die Differentialgleichung der Leitlinie in Polarcoordinaten zu finden.

Die Formeln, die dazu dienen, zu einer in Polarcoordinaten gegebenen Curve die Differentialgleichung der Leitlinie in rechtwinkligen Coordinaten zu finden, sind nicht so einfach. Der Vollständigkeit wegen mögen sie indessen beigelegt werden. Setzt man nämlich in 5.  $x=r.\cos t$ ,  $y=r.\sin t$ , so erhält man:

$$15. \quad \operatorname{tgt} = \frac{(\xi^2 - \eta^2) + 2\xi\eta\eta'}{(\xi^2 - \eta^2)\eta' - 2\xi\eta}, \quad r = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta' - 2\eta} \sqrt{1 + \eta'^2}.$$

Zur Vereinfachung kann man allenfalls den Bogen  $\sigma$  der Leitlinie einführen. Denn es ist

$$\sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{d\xi^2}} = \frac{d\sigma}{d\xi},$$

und daher

$$r = \frac{(\xi^2 + \eta^2)d\sigma}{2\xi d\eta - 2\eta d\xi}.$$

4.

Wir wollen von den gewonnenen Formeln einige specielle Anwendungen machen.

Es sei die gegebene Curve eine grade Linie, die durch den Coordinatenanfangspunkt geht; also ihre Gleichung  $x=ay$ . Die Gleichung der Leitlinie ist sofort:

$$\cos\theta.\varrho - \sin\theta.\varrho' = a.\sin\theta.\varrho + a.\cos\theta.\varrho',$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\cot\theta - a}{a.\cot\theta + 1} d\theta,$$

$$\varrho = c(a.\cos\theta + \sin\theta).$$

In rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi^2 + \eta^2 = c(a\xi + \eta),$$

d. i. die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser  $= \frac{c}{2} \sqrt{a^2 + 1}$  und die Coordinaten des Mittelpunktes  $\alpha = -\frac{ac}{2}$ ,  $\beta = -\frac{c}{2}$ , wo  $\alpha$  die Ab-

scisse,  $\beta$  die Ordinate bedeutet. Es ist klar, dass dieser Kreis durch den Coordinatenanfangspunkt geht, so wie auch, dass der Halbmesser nach dem Coordinatenanfangspunkte dieselbe Richtung wie die Linie  $x=ay$  hat. Diese Linie ist also selbst normal zu dem Kreise im Coordinatenanfangspunkte, der Kreis also in der That ihre Leitlinie.

## 5.

Die gegebene Curve sei eine Linie zweiter Ordnung und der Coordinatenanfangspunkt ein Brennpunkt derselben. Ihre Gleichung ist alsdann  $x^2 + y^2 - (p+ex)^2 = 0$ , die Gleichung der Leitlinie:

$$(\cos\theta.\rho - \sin\theta.\rho')^2 + (\sin\theta.\rho + \cos\theta.\rho')^2 - (2p + e.\cos\theta.\rho - e.\sin\theta.\rho')^2 = 0$$

oder

$$\begin{aligned} \text{A. } (1 - e^2 \sin^2 \theta) \rho'^2 + (2e^2 \sin \theta \cos \theta \rho + 4pe \sin \theta) \rho' \\ + \rho^2 - e^2 \cos^2 \theta \rho^2 - 4pe \cos \theta \rho - 4p^2 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich nicht allgemein integrieren. Die Herleitung des singulären Integrals unterliegt hingegen keiner Schwierigkeit, indem man nach bekannten Regeln die Gleichung A. nach  $\rho'$  differentiirt, den Differentialquotienten  $= 0$  setzt, und den so erhaltenen Werth

$$\rho' = - \frac{e^2 \sin \theta \cos \theta \rho + 2pe \sin \theta}{1 - e^2 \sin^2 \theta}$$

in A. substituirt. Nach gehöriger Reduction ist sodann:

$$(1 - e^2) \rho^2 = 4pe \cos \theta \rho + 4p^2,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(1 - e^2)(\xi^2 + \eta^2) = 4pe\xi + 4p^2.$$

Die allgemeine Gleichung der zweiten Ordnung specialisirt sich, je nachdem  $e$  verschiedene Werthe erhält. Stellen wir diese specielleren Gleichungen mit denen der Leitlinien zusammen, so ist:

$$e = 1 ; y^2 - 2px = p^2 \text{ eine Parabel;}$$

$$\xi = -p \text{ eine gerade Linie;}$$

$$e > 1 ; x^2 + y^2 - (p+ex)^2 = 0 \text{ eine Hyperbel;}$$

Ellipse

$$(1 - e^2)(\xi^2 + \eta^2) = 4pe\xi + 4p^2 \text{ ein Kreis;}$$

$e = \sqrt{2}$  ;  $y^2 - x^2 - 2\sqrt{2}px = p^2$  eine gleichseitige Hyperbel ;

$$-\xi^2 - \eta^2 = 4\sqrt{2}p\xi + 4p^2 \text{ ein Kreis ;}$$

$e = 0$  ;  $x^2 + y^2 = p^2$  ein Kreis ;

$\xi^2 + \eta^2 = 4p^2$  ein concentrischer Kreis vom doppelten Halbmesser.

## 6.

Für den speciellen Fall, dass die Curve zweiter Ordnung ein Kreis ist, lässt sich auch das allgemeine Integral, d. h. die verschiedenen Leitlinien finden. Die Polargleichung des Kreises sei nämlich  $r = p$ , so ist  $4r^2 = 4p^2$ . Diesen Werth führen wir in die Gleichung 12. ein:

$$\varrho'^2 + \varrho^2 = 4p^2,$$

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{4p^2 - \varrho^2}} = d\theta;$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung ist  $\theta = -c + \arcsin \frac{\varrho}{2p}$ ,  
oder

$$\varrho = 2p \cdot \sin(\theta + c).$$

In rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi^2 + \eta^2 = 2p \cdot \cos c \cdot \eta + 2p \cdot \sin c \cdot \xi.$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten  $\alpha = p \cdot \sin c$ ,  $\beta = p \cdot \cos c$  entsprechen; d. h. die Gleichung eines Kreises von gleichem Halbmesser wie die Curve und dessen Mittelpunkt die Curve selbst zum Orte hat. Will man hingegen die einhüllende Leitlinie finden, so differentiirt man  $\varrho'^2 + \varrho^2 = 4p^2$  nach  $\varrho'$ , woraus  $\varrho' = 0$  und durch Einführung dieses Werthes

$$\varrho^2 = 4p^2;$$

das ist derselbe concentrische Kreis vom doppelten Halbmesser, den wir auch in der vorigen Nummer fanden.

7.

Ist die gegebene Curve eine gleichseitige Hyperbel und der Mittelpunkt derselben der Coordinatenanfangspunkt, so haben wir die Gleichung  $x^2 - y^2 = a^2$ . Daraus folgt als Differentialgleichung der Leitlinie:

$$A. \varrho'^2 + 2\operatorname{tg}2\theta.\varrho.\varrho' = \varrho^2 - \frac{4a^2}{\cos 2\theta}.$$

Hier müssen wir uns wieder mit der singulären Auflösung begnügen:  $2\varrho' + 2\operatorname{tg}2\theta.\varrho = 0$ , folglich

$$\varrho' = -\operatorname{tg}2\theta.\varrho$$

in A. substituirt giebt:

$$\frac{4a^2}{\varrho^2.\cos 2\theta} = 1 - \operatorname{tg}2\theta^2 + 2\operatorname{tg}2\theta^2 = \frac{1}{\cos 2\theta^2}$$

oder

$$\varrho = 2a\sqrt{\cos 2\theta};$$

in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = 4a^2(\xi^2 - \eta^2),$$

welches bekanntlich die Gleichung der Lemniscate ist.

8.

Die gegebene Curve sei wieder die Parabel; aber zum Coordinatenanfangspunkt sei der Scheitel der Parabel gewählt, deren Gleichung demnach  $y^2 = ax$  ist. Die Leitlinie hat die Gleichung:

$$A. (\sin\theta.\varrho + \cos\theta.\varrho')^2 = 2a.\cos\theta.\varrho - 2a.\sin\theta.\varrho'.$$

Um das singuläre Integral zu finden, setzen wir

$$2(\sin\theta.\varrho + \cos\theta.\varrho')\cos\theta = -2a.\sin\theta.\varrho'$$

oder

$$\varrho' = -\operatorname{tg}\theta\left(\varrho + \frac{a}{\cos\theta}\right).$$

Substitution dieses Werthes in die Gleichung A. verwandelt dieselbe in

$$\rho = -\frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \theta,$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$\xi(\xi^2 + \eta^2) + \frac{a}{2} \eta^2 = 0.$$

Die Bedeutung dieser Gleichung wird klar, wenn man  $\xi = -\xi_1$  setzt, wodurch sie sich in

$$\xi_1(\xi_1^2 + \eta^2) - \frac{a}{2} \eta^2 = 0$$

verwandelt, oder in die Gleichung einer Cissoide, deren Lage gegen die Parabel so ist, dass die Ordinatenrichtung beiden gemeinschaftlich, die Abscissenrichtung entgegengesetzt ist.

## 9.

Die gegebene Curve sei die logarithmische Linie  $y = e^x$ . Die Differentialgleichung der Leitlinie ist:

$$\frac{\rho}{2} \cdot \sin \theta + \frac{\rho'}{2} \cdot \cos \theta = e^{\frac{\rho}{2} \cos \theta - \frac{\rho'}{2} \sin \theta}.$$

Daraus findet man die singuläre Auflösung:

$$-\cot \theta = e^{1 + \frac{\rho}{2 \cos \theta}},$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten:

$$-\frac{\xi}{\eta} = e^{\frac{\xi^2 + \eta^2 + \xi}{2\xi}},$$

wo offenbar die zusammen gehörigen Abscissen und Ordinaten entgegengesetzte Zeichen führen.

## 10.

Als letztes Beispiel wollen wir zur Curve die logarithmische Spirale nehmen, deren Gleichung  $r = e^t$ . Nun war

$$\varrho'^2 + \varrho^2 = 4r^2 = 4e^{2t},$$

also

$$t = \frac{1}{2} \log \frac{\varrho'^2 + \varrho^2}{4};$$

ferner

$$t - \theta = \operatorname{arctg} \frac{\varrho'}{\varrho}.$$

Also durch Verbindung der beiden Gleichungen:

$$\operatorname{arctg} \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{1}{2} \log \frac{\varrho'^2 + \varrho^2}{4} - \theta.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach  $\varrho'$  zeigt, dass

$$\frac{\frac{1}{\varrho}}{1 + \frac{\varrho'^2}{\varrho^2}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{2\varrho'}{4}}{\frac{\varrho'^2 + \varrho^2}{4}},$$

folglich  $\varrho' = \varrho$ ; und nun erhalten wir die Gleichung:

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} \log \frac{\varrho^2}{2} - \theta,$$

oder wenn  $\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}} = \alpha$  gesetzt wird:

$$\varrho = \alpha \cdot e^{\theta},$$

wieder eine logarithmische Spirale. Diese merkwürdige Curve erzeugt sich also auch hier selbst, eine Eigenschaft, die sie bekanntlich bei jeder Gelegenheit zeigt.

## 11.

So wie wir bisher eine krumme Linie als Leitlinie einer anderen betrachtet haben, so können wir auch von Leitflächen reden, indem wir die Definition aufstellen: Die Leitfläche einer Fläche charakterisirt sich durch die Eigenschaft, dass die Normale, welche von irgend einem Punkte der ersten Fläche auf sie gefällt wird, gleich der Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkte im Raume ist, den wir der Einfachheit wegen wieder zum Coordinatenanfangspunkte nehmen. Die Gleichung der gegebenen Fläche sei  $f(x, y, z) = 0$ , die Gleichung der Leitfläche  $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ .



Die Gleichungen der Normale auf die Leitfläche, welche zugleich durch einen Punkt  $x, y, z$  geht, sind

$$x - \xi = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}(z - \zeta), \quad y - \eta = -\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}(z - \zeta);$$

indem wir die partiellen Differentiale durch geschwungene  $\partial$  bezeichnen. Ausserdem muss nun die Entfernung der Punkte  $x, y, z$  und  $\xi, \eta, \zeta$  gleich der Entfernung des Punktes  $x, y, z$  vom Koordinatenanfangspunkte sein, also:

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Wir haben daher folgende fünf Gleichungen:

- I.  $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ,
- II.  $f(x, y, z) = 0$ ,
- III.  $x - \xi = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}(z - \zeta)$ ,
- IV.  $y - \eta = -\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}(z - \zeta)$ ,
- V.  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2(x\xi + y\eta + z\zeta)$ .

In Bezug auf Leitflächen lassen wir es vorläufig bei diesen Andeutungen bewenden, uns weitere Ausführung vorbehaltend.

---

## XV.

# Die Wichtigkeit des Neuton'schen Luft- widerstands - Gesetzes, so wie Vor- schläge zur Auffindung des wahren.

Von

Herrn Brenner,

Lehrer zu Tuttlingen in Württemberg.

---

Wie wünschenswerth es für die Wissenschaft, ja wie ausserordentlich wichtig es für die Ballistik wäre, das Gesetz zu kennen, nach welchem die atmosphärische Luft einem in ihr befindlichen Mobile einen Widerstand entgegensetzt, ist schon längst klar erkannt, und sind auch zu dessen Entdeckung sehr bedeutende Anstrengungen gemacht worden. Da die Luft in denjenigen Räumen, für die man jenen Widerstand gleichzeitig zu wissen nöthig hat, gleichzeitig auch vollkommen gleich vertheilt ist und gleiche Elasticität besitzt, so kann es nicht anders sein — sie muss in ihrem Widerstand ein ganz bestimmtes, vielleicht sehr einfaches, Gesetz befolgen, und es ist nur zu verwundern, dass bis Dato dieses Gesetz noch nicht hat entdeckt werden können.

Ich will nicht behaupten, dass durch eine Theorie, bei der man ein vollständig gleich dichtes und vollkommen elastisches Fluidum anzunehmen hat, nichts geleistet werden könne — aber das glaube ich, dass die Beobachtung sicherer und schneller zum Ziele führt, und dann mag die Theorie, wie diess in Beziehung auf die Lehren der Astronomie, Mechanik, Physik fast immer der Fall ist, ihre tiefere Begründung hintennach folgen lassen.

Wenn der Verfasser nicht den Versuch macht, vorliegendes Problem zum Ende zu führen, so liegt der Grund darin, dass ihm nicht die Mittel zu Gebot standen, die hier nöthigen Experimente mit der nöthigen Schärfe zu veranstalten.

Offenbar am wichtigsten ist der Widerstand, den die Luft der Kugel entgegensetzt, und darum werden sich die Vorschläge, die ich zu machen gedenke, auch nur auf jene beschränken. Dabei bin ich von der Zuversicht weit entfernt, dass der Zweck gerade auf den von mir vorgezeichneten Wegen erreicht werden kann, sondern glaube vielmehr, dass es nöthig werden möchte, auch die von mir entworfene detaillirte Theorie vielfältig zu modificiren, möglicher Weise gar zu verwerfen. Allein Beruhigung wird mirs gewähren und mit Freude mich erfüllen, wenn ich auch nur eine Idee aufgedeckt haben sollte, welche endlich zur Darstellung des fraglichen Gesetzes führen könnte.

Laplace gibt in seiner *Mécanique céleste* eine einfache Formel für jenes Gesetz an, wofern die von der Kugel beschriebene Curve bekannt ist. Bezeichnet man mit  $z$  die vertikalen Ordinaten, mit  $s$  den Bogen der Curve, mit  $g$  die örtliche Schwere und mit  $\beta$  den Widerstand, so ist

$$\beta = g \cdot \frac{\partial s \cdot \partial^3 z}{2(\partial^2 z)^2},$$

in sich die Differentiale auf die Abscissen  $x$  beziehen.

Wäre man im Stande, einer durch die Luft geworfenen grossen Kugel (Bombe) ein sehr intensives Licht mitzutheilen, welches weder die Dichtigkeit und Elasticität der die Kugel umgebenden Luft, noch die Masse und Oberfläche der Kugel veränderte, so könnte die Bahn auf folgende Weise gewonnen werden.

In der Seitenwand eines dunkeln Zimmers ist durch ein papierdünnes Blech eine sehr kleine, nicht eine halbe Linie im Durchmesser haltende kreisrunde Oeffnung angebracht, durch welche ein leuchtender Körper auf eine gegenüberstehende Wand einen hellen Punkt wirft. Hinter dieser Wand, welche aus durchscheinendem, auf ein sehr feines Drahtgesecht aufgezogenem Papier besteht, steht ein Zeichner. Dieser kann sich vor dem Experiment üben, die Bahn eines durch ein bewegtes Licht hervorgebrachten hellen Punktes auf seiner Papierwand mit Genauigkeit zu zeichnen. Hierauf lässt man Nachts bei Windstille und in geeigneter (bedeutender) Entfernung vor der dunkeln Kammer vermittelst eines groben Geschützes (Bombe) die oben beschriebene leuchtende Kugel ihre Bahn durch die Luft beschreiben und der Zeichner zeichnet solche auf seine Wand, welche zu diesem Behuf vertikal stehen und mit der Ebene der von der Kugel beschriebenen Curve parallel sein muss. Die gezeichnete Bahn wird dadurch der wirklichen vollständig ähnlich und zeigt sich bloss in umgekehrter Lage. Beschreibt der helle Punkt auf der Wand in einer Sekunde den Weg von einem Fuss, so kann ein

auch nicht sehr geübter Zeichner die Bahn gar wohl mit Genauigkeit aufzeichnen.

Es ist klar, dass der gesuchte Widerstand eine Funktion von der Geschwindigkeit  $v$  des Mobils ist. Die Formel

$$\beta = g \cdot \frac{\partial s \cdot \partial^3 z}{2(\partial^2 z)^2} = \frac{1}{2} g v \cdot \frac{\partial^3 z}{(\partial^2 z)^2}$$

gibt jedoch denselben nicht als reine Funktion von  $v$ , sondern untermischt mit den Abscissen  $x$ . Man hat jedoch  $z$  in Funktion von  $x$ , oder  $z = f(x)$ , wodurch auch  $v$  sich als eine solche darstellt, d. h.

$$v = \sqrt{1 + \partial z^2} = \varphi(x).$$

Man wird daher aus dieser Gleichung und aus

$$\beta = \frac{1}{v} g v \cdot \frac{\partial^3 z}{(\partial^2 z)^2}$$

$x$  eliminiren, um  $\beta$  in Funktion von  $v$  dargestellt zu sehen. — Wenn auch nicht die Gleichung der Bahn, so könnte vielleicht doch schon nach kurzem Ueberblick, vielleicht erst nach grosser Mühe, vielleicht auch gar nicht, eine endliche Form für den Widerstand hergestellt werden.

---

Praktischer noch und der Probe werth erscheint folgendes Verfahren, welches zu gleicher Zeit eine sehr einfache Analysis zulässt:

Indem man ein gutes Feueergewehr 10 — 15 mal mit derselben Ladung versieht, bestimme man vermittelst des ballistischen Pendels auf einer horizontalen Ebene (Thal) bei Windstille und nach jedesmaligem Abfeuern die Geschwindigkeit der Kugel für verschiedene Entfernungen\*). Um möglichste Gleichheit der Umstände herbeizuführen, wird man ein gutes, trockenes und gut gemischtes Pulver in völlig gleichen Quantitäten gebrauchen. Die Kugeln müssen vollständig rund und gleich schwer sein und dürfen nicht aus einem solchen Rohr geschossen werden, welches dieselben angreift. Nach jedem Schuss muss die Flinte wieder

---

\*) Für die ersten Schüsse wähle man die kürzesten und gradationsweise für die später folgenden die grösseren Entfernungen. Beim ersten Schuss jedoch stelle man das Pendel nicht unmittelbar vor die Mündung des Rohrs, wegen des noch auf einige Weite wirkenden Pulverdampfes.

gereinigt werden, so wie man auch den ersten Schuss leer, d. h. nicht zur Beobachtung gehörig, thut. Das Pflaster muss passend und für alle Schüsse gleich sein; die Flinte oder auch nur deren Rohr werde sehr fest angeschraubt. — Um sich aber von der Gleichheit der Umstände zu überzeugen, wird man 4—6 Schüsse in gleicher Entfernung thun und zusehen, ob sich stets die gleiche Geschwindigkeit zeigt.

Die Bahn der Kugel kann man geradlinig und als Abscissenaxe  $x$  annehmen, wo man den Anfang vom Schiessstandpunkt aus zählt. Je kleiner die Geschwindigkeit  $v$  wird, desto grösser ist die Abscisse  $x$ , und wir können desswegen die letztere in Funktion der erstern ausdrücken, und zwar durch

$$x = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \dots}$$

oder

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \dots = \frac{1}{x}.$$

Bezeichnet man die zusammengehörigen Beobachtungswerthe von  $x$  und  $v$  je durch  $x_1$  und  $v_1$ ;  $x_2$  und  $v_2$ ;  $x_3$  und  $v_3$  u. s. w., so lassen sich folgende Gleichungen formiren, aus denen die Coefficienten  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$  berechnet werden können:

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_1^2 + \varepsilon_3 v_1^3 \dots = \frac{1}{x_1},$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_2 + \varepsilon_2 v_2^2 + \varepsilon_3 v_2^3 \dots = \frac{1}{x_2},$$

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v_3 + \varepsilon_2 v_3^2 + \varepsilon_3 v_3^3 \dots = \frac{1}{x_3},$$

.....

Nun ist aber, wenn man den Luftwiderstand durch  $\gamma$  bezeichnet, nach den bekannten Lehren der Mechanik

$$\partial v = -\gamma,$$

$$v = \partial x.$$

Stellt man  $x$  durch  $\varphi(r)$  dar, und  $\partial_r \varphi(r)$  durch  $\varphi'(r)$ , so hat man

$$\partial x = \varphi'(r) \partial r$$

oder

$$v = -\varphi'(v)\gamma$$

und

$$\gamma = -\frac{v}{\varphi'(v)}.$$

Es ist aber

$$\varphi(v) = \frac{1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \dots}$$

und

$$\varphi'(v) = -\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 v + 3\varepsilon_3 v^2 \dots}{(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \dots)^2},$$

folglich

$$\gamma = \frac{v(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 v + \varepsilon_2 v^2 + \varepsilon_3 v^3 \dots)^2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 v + 3\varepsilon_3 v^2 \dots},$$

welchem sich leicht die Form geben lässt:

$$\gamma = p v + p_2 v^2 + p_3 v^3 + p_4 v^4 + \dots$$

Nehmen wir auf einen Augenblick an,  $\gamma$  enthalte bloss das Glied  $P v^m$ , so können wir auf die zwischen  $x$  und  $v$  existirende Gleichung dadurch zurücksteigen, dass wir die beiden obigen Gleichungen der Bewegung mit einander multipliciren. Sie geben

$$v \partial v = -\gamma \partial x$$

und

$$\partial x = -\frac{v \partial v}{\gamma} = -\frac{1}{P} \frac{v \partial v}{v^m},$$

deren Integral ist:

$$x = C + \frac{1}{P(m-2)} \cdot \frac{1}{v^{m-2}}.$$

Es ist zu gleicher Zeit  $x = x_1$  und  $v = v_1$ , und desswegen

$$x - x_1 = \frac{1}{P(m-2)} \left( \frac{1}{v^{m-2}} - \frac{1}{v_1^{m-2}} \right).$$

Ist  $m > 2$ , so wird für  $v = 0$  die Entfernung  $x = \infty$ .

Ist  $m = 2$ , so wird der Nenner  $m - 2 = 0$ . Allein die unmittelbare Integration gibt

$$x - x_1 = \frac{1}{P} \log \frac{v_1}{v}.$$

Auch in diesem Fall ist für  $v=0$  die Entfernung  $x=\infty$ , d. h. in beiden Fällen wird die Kugel nie zum Stillstand kommen. Ist aber  $m < 2$ , so hat man

$$x - x_1 = \frac{1}{P(2-m)} (v_1^{2-m} - v^{2-m}).$$

Hier ist nun für  $v=0$  die Entfernung

$$x = x_1 + \frac{v_1^{2-m}}{P(2-m)},$$

wird aber desto grösser, je mehr sich  $m$  dem Werthe 2 nähert.

In der That, je grösser  $m$  wird, desto kleiner wird der Widerstand  $\gamma = Pv^m$  bei abnehmender Geschwindigkeit  $v$ , und ist diese Geschwindigkeit eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung geworden, so ist schon bei  $m=2$  der Widerstand eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung.

Hat daher der Widerstand  $\gamma$  die Form

$$\gamma = Pv^m + P_2v^n + P_3v^o \dots,$$

Keiner der Exponenten  $m, n, o \dots$  kleiner ist als 2, so wird sich noch in diesem Fall die Kugel nie zum Stillstand kommen. Könnte nun durch Beobachtung nachgewiesen werden, dass ein Mobil durch den Widerstand der Luft allein wirklich zum Stillstand gebracht wird, so würde daraus folgen, dass  $\gamma$  wenigstens ein Glied enthalten muss, in welchem der Coefficient von  $v$  kleiner ist als 2.

Lasse ich aber einen Pendel schwingen, bei dem die Schwere bekanntlich das Bestreben äussert, dasselbe fortwährend die gleichen Schwingungen beschreiben zu lassen, und bei dem ich die Reibung durch eine Messerschärfe nach der Vorrichtung Taf. III. Fig. 3. wohl gänzlich beseitige, so wird man schon nach einigen Stunden völlige Ruhe gewahren\*), ein Beweis dass das Neuton'sche Gesetz, welches  $m=2$  setzt, unrichtig ist.

---

\*) Eine mittelst einer hölzernen Kugel gemachte Beobachtung hat die Ruhe nach Verfluss von 5 St. 2 M. nachgewiesen. Das Pendel war 70,4 Par. Zoll lang, die Kugel hatte im Durchmesser 5,09'' und wog 3 Pfd. 12 Lth. Württembergisch; das Pendel wurde Anfangs um den Winkel von  $5^\circ 56'$  aus der vertikalen Lage gebracht.

Die leichteste und schärfste Beobachtung lässt das Pendel zu, allein sie führt eine sehr schwierige Theorie im Gefolge.

Man lasse nemlich eine Kugel an einem möglichst dünnen Drathe, mit angemessenen Dimensionen und an geeignetem Orte schwingen, und beobachte die durch den Luftwiderstand stetig verringerten Ausschlagwinkel.

Es sei (Taf. III. Fig. 4.)  $A$  der Aufhängepunkt,  $AZ$  eine Vertikale,  $AC=r$  die Verbindungslinie des erstern mit dem Centrum  $C$  der Kugel,  $AM$  eine andere Gerade an ein ganz beliebiges Element  $dM$  derselben.

Dieses Element  $dM$  wird von der Schwere  $g$  nach der vertikalen Richtung  $MG$  sollicitirt, und zwar mit der bewegendes Kraft  $gdM$ , wenn wir die Dichtigkeit der Masse  $=\rho$  setzen. Die Bewegung der Kugel aber können wir vermittelst der Momentengleichung bestimmen. Wir zerlegen daher die Kraft  $gdM$  in zwei Kräfte, die eine nach der Verlängerung von  $AM$ , die andere nach der auf derselben Senkrechten  $ML$ . Die erstere wird im Aufhängepunkt zernichtet, die andere aber ist

$$gdM \cdot \sin w,$$

wenn wir den Winkel  $MAZ$  gleich  $w$  setzen. Setzen wir  $AM=R$ , so ist die Geschwindigkeit des Elements  $dM$  gleich  $R\dot{w}$ , wobei wir uns die Kugel von der Vertikalen  $AZ$  sich entfernend, oder kurz steigend, denken. Folglich ist das Wachsthum an bewegender Kraft

$$=g\rho R dM \dot{w}^2,$$

welche Grösse nach D'Alembert's Lehrsatz negativ in Rechnung zu bringen ist. Da wir die von  $AZ$  sich entfernende Richtung positiv nehmen, so ist die Kraft

$$gdM \cdot \sin w$$

gleichfalls negativ zu nehmen.

Die von diesen Kräften herrührenden Momentensummen sind daher

$$-\rho \int dM (R^2 \dot{w}^2 + Rg \sin w).$$

Ueberdiess wirkt auf die Kugel noch der Widerstand der Luft, und zwar verzögernd. Setzen wir den absoluten Luftwiderstand  $=\gamma$ , so können wir uns denselben im Centrum der Kugel angebracht denken und somit haben wir für dessen Moment

$$r\gamma.$$



Somit haben wir endlich die Gleichung

$$\varrho \int dM R^2 \partial^2 w + \varrho g \int R dM \sin w + r\gamma = 0.$$

Ziehe ich aber die senkrechte Linie  $MN$ , so ist  $MN = R \sin w$  und das Glied

$$\varrho \int R dM \sin w = \varrho \int MN \cdot dM.$$

Bekanntlich ist aber  $\varrho \int MN \cdot dM$  gleich dem statischen Momente der ganzen bewegten Masse  $\varrho M$  in Beziehung auf den Schwerpunkt. Ziehe ich daher  $CP$  senkrecht auf  $AZ$ , so ist

$$\varrho \int R dM \sin w = \varrho M \cdot CP = \varrho M r \sin \theta,$$

wenn wir den Winkel  $CAZ = \theta$  setzen.

Da nun auch  $\partial^2 w = \partial^2 \theta$ , so gestaltet sich unsere Gleichung wie folgt:

$$\varrho \partial^2 \theta \int R^2 dM + \varrho g M r \sin \theta + r\gamma = 0.$$

$\varrho \int R^2 dM$  ist aber das Trägheitsmoment der Kugel in Beziehung auf eine durch  $A$  gehende Axe. Ist die Kugel hohl und ihr äußerer Durchmesser  $= A$ , so wie ihr innerer  $= a$ , so hat man

$$\varrho \int R^2 dM = \varrho \left[ \frac{8}{15} \pi (A^5 - a^5) + \frac{4}{3} \pi r^2 (A^3 - a^3) \right].$$

Setzt man das Verhältniss  $\frac{a}{A} = k$ , so ist

$$\varrho \int R^2 dM = \frac{4}{3} \varrho \pi A^3 (1 - k^3) \left[ \frac{2}{5} A^2 \cdot \frac{1 - k^5}{1 - k^3} + r^2 \right].$$

Gleicherweise ist

$$\varrho M = \frac{4}{3} \varrho \pi A^3 (1 - k^3).$$

Setze ich nun

$$r + \frac{2}{5} \cdot \frac{A^2}{r} \cdot \frac{1 - k^5}{1 - k^3} = l,$$

men, dass dessen Einfluss auf die Oscillationen unmerklich sind, jedoch nicht in solchem Grade, dass er durch die verschiedenen Anspannungen verschiedene Dimensionen angenommen hätte. Um die Ausschlagwinkel mit Schärfe zu bestimmen, war es durchaus nothwendig, dass nach jedem Zurücksinken der Kugel durch irgend eine Vorrichtung sich eine Ruhe einstellte (die Ruhe des zurückgehenden Drathes ist nur momentan), in der man an einem Lineal den Schenkel jenes Winkels zeichnen kann. Diesen Zweck unterstützte der glückliche Umstand, dass man die kleineren Ausschlagwinkel als weniger brauchbar verwerfen kann, weil die grössern wegen ihrer grössern Differenzen sichere Resultate gewähren.

Man schlägt nemlich in ein vollkommen geebnetes, mit seiner Ebene vertikal stehendes und gut befestigtes Brett einen möglichst dünnen Stift völlig senkrecht auf die Brettebene. An diesen Stift wird, etwa eine Linie vom Brett entfernt, der die Kugel tragende Drath mit einer einfachen Schlaufe angehängt, und der Kugel eine solche Schwingung gegeben, dass der Drath stets mit dem Brett parallel läuft. Vorher aber wird auf den Stift folgende Vorrichtung geschoben:

Man verfertige sich aus Kartenpapier oder starkem doppelt zusammengeleimten Notenpapier eine zweifach ausgeschnittene Scheibe in angemessenen Dimensionen. *A* (Taf. II. Fig. 5.) ist der kreisrunde kleine Ausschnitt, durch den der Stift kommt und in dem eben dieser Stift noch einige Spannung bekommt. Durch den Mittelpunkt in *A* werden zwei einen Winkel von etwa  $30^\circ$  bildende Gerade *DC* und *BE* gezogen. In *B* und *C* werden zwei ebenfalls von Papierstreifen gemachte Stifte, deren Seite ansicht *L* zeigt, angeleimt, wobei aber die durch die Dreiecke bestimmten Flächen genau senkrecht auf der Ebene der Scheibe und übrigens so stehen, dass die Linien *DC* und *BE* durch diese Dreiecksflächen gehen. Der Winkel *DAE* wird durch die Linie *FG* ungefähr in zwei gleiche Theile getheilt und das Dreieckchen *FGH* heraus geschnitten, wo dann *FG* das Lineal bildet. Diese Scheibe wird ganz an das befestigte ebene Brett angelehnt und kann sich leicht um den Zapfen *A* bewegen, bleibt aber augenblicklich stehen, so bald die auf dieselbe wirkende Kraft aufhört. Hierauf lasse man die Kugel in völliger Ruhe (vertikal) hängen, und bewege die Scheibe *DEBC* zweimal so, dass die Stifte *B* und *C* den Drath berühren, drücke dieselbe (die Scheibe) jedesmal mit der linken Hand an das Brett und mache mit einem fein gespitzten Bleistift an dem Lineal *FG* eine Linie auf das an das Brett aufgeleimte Papier. Diese Linien verlängere man zur Unterscheidung noch etwas über *F* hinaus, weil sie die Fundamentalschenkel der zu messenden Winkel bilden. Hierauf lasse man die Kugel unter einem Winkel von etwa  $60^\circ$  so in die Höhe halten, dass der Drath bei fortwährender Anspannung durch den Mittelpunkt derselben geht. Der Drath aber wird die bewegliche Scheibe an einem der Stifte *B* oder *C* seitwärts ziehen, und in der Ruhe angelangt, wird man sie mit den Fingern der linken

Drücken, und am Lineal seine dritte Linie ziehen. Hierauf  
 in die Kugel ruhig fallen, und im Fall wird der Drath am  
 Stift die Scheibe auf die andere Seite schieben, und nach  
 Zurückweichung dieselbe auf einige Zeit in Ruhe lassen.  
 Ruhe benutzt man, um am Lineal die vierte Linie zu zie-  
 bei aber wird man sich beeilen, der Scheibe durch Auf-  
 der linken Hand die Freiheit wieder zu geben, damit sie  
 geschoben werden kann, um wieder in Ruhe zu gelan-  
 so wird man sich so viele Linien zeichnen, als man Win-  
 big zu haben glaubt, ja man wird für eine zweite, dritte  
 7. Beobachtung stets nur ein neues Papier an seinen vier  
 auf das Brett ankleben. Das jedesmalige Schieben der  
 e bedarf einer so geringen Kraft, dass der Drath nicht  
 ch gebogen wird, wovon man sich leicht überzeugen kann.  
 t wird sich folgende Zeichnung (Taf. III. Fig. 6.) darstellen:  
 nd  $CD$  sind die beiden Fundamentalschenkel. Die von der  
 alen rechts abliegenden Winkel des Pendels liegen hier von  
 ks und werden auch von  $CD$  an gemessen. Die übrigen  
 rechts von  $AB$  und werden auch von  $AB$  an gemessen. —  
 lche Weise wurden folgende Resultate erzielt:

# Beobachtung den 24. September 1849.

Erste Winkelbeobachtung.		Zweite Winkelbeobachtung.	
$\theta_1 = 55^\circ 45'$	$\theta_{21} = 25^\circ 30'$	$\theta_1 = 63^\circ 50'$	$\theta_{21} = 27^\circ$
$\theta_2 = 52^\circ 30'$	$\theta_{22} = 25^\circ$	$\theta_2 = 59^\circ 30'$	$\theta_{22} = 26^\circ 30'$
$\theta_3 = 50^\circ 15'$	$\theta_{23} = 24^\circ 15'$	$\theta_3 = 56^\circ$	$\theta_{23} = 25^\circ 45'$
$\theta_4 = 47^\circ 10'$	$\theta_{24} = 23^\circ 45'$	$\theta_4 = 52^\circ 45'$	$\theta_{24} = 25^\circ$
$\theta_5 = 45^\circ 15'$	$\theta_{25} = 23^\circ$	$\theta_5 = 50^\circ$	$\theta_{25} = 24^\circ 20'$
$\theta_6 = 43^\circ$	$\theta_{26} = 22^\circ 30'$	$\theta_6 = 48^\circ$	$\theta_{26} = 23^\circ 40'$
$\theta_7 = 41^\circ 15'$	$\theta_{27} = 21^\circ 45'$	$\theta_7 = 45^\circ 15'$	$\theta_{27} = 23^\circ$
$\theta_8 = 39^\circ 30'$	$\theta_{28} = 21^\circ 30'$	$\theta_8 = 43^\circ 15'$	$\theta_{28} = 22^\circ 30'$
$\theta_9 = 37^\circ 50'$	$\theta_{29} = 20^\circ 45'$	$\theta_9 = 41^\circ$	$\theta_{29} = 22^\circ$
$\theta_{10} = 36^\circ 20'$	$\theta_{30} = 20^\circ 20'$	$\theta_{10} = 39^\circ 45'$	$\theta_{30} = 21^\circ 30'$
$\theta_{11} = 35^\circ$	$\theta_{31} = 19^\circ 45'$	$\theta_{11} = 37^\circ 50'$	$\theta_{31} = 21^\circ$
$\theta_{12} = 33^\circ 45'$	$\theta_{32} = 19^\circ 30'$	$\theta_{12} = 36^\circ 45'$	$\theta_{32} = 20^\circ 30'$
$\theta_{13} = 32^\circ 40'$	$\theta_{33} = 18^\circ 45'$	$\theta_{13} = 35^\circ 10'$	$\theta_{33} = 20^\circ$
$\theta_{14} = 31^\circ 20'$	$\theta_{34} = 18^\circ 30'$	$\theta_{14} = 33^\circ 45'$	$\theta_{34} = 19^\circ 45'$
$\theta_{15} = 30^\circ 15'$	$\theta_{35} = 18^\circ$	$\theta_{15} = 32^\circ 40'$	$\theta_{35} = 19^\circ 15'$
$\theta_{16} = 29^\circ 30'$	$\theta_{36} = 17^\circ 50'$	$\theta_{16} = 31^\circ 30'$	$\theta_{36} = 19^\circ$
$\theta_{17} = 28^\circ 30'$	$\theta_{37} = 17^\circ 25'$	$\theta_{17} = 30^\circ 30'$	$\theta_{37} = 18^\circ 30'$
$\theta_{18} = 28^\circ$	$\theta_{38} = 17^\circ 15'$	$\theta_{18} = 29^\circ 30'$	$\theta_{38} = 18^\circ 15'$
$\theta_{19} = 27^\circ$		$\theta_{19} = 28^\circ 45'$	$\theta_{39} = 17^\circ 45'$
$\theta_{20} = 26^\circ 15'$		$\theta_{20} = 28^\circ$	$\theta_{40} = 17^\circ 30'$

Pendellänge (bis zum Centrum der Kugel) = 27',577 Württen.

Aeusserer Durchmesser der Kugel = 1',034.

Gewicht derselben = 8 Pfund 12½ Loth Württemb.

Barometerstand 24" 4½'''.

Thermometerstand + 11° Reaumur.

Es wurde auch mit einer zweiten massiven Kugel in der Grösse einer Kegelkugel eine dritte Beobachtung angestellt; allein sie bietet wegen der dabei vorgekommenen Eile so wenig Zuverlässigkeit dar, dass ihre Angabe hier füglich weg bleiben mag.

Vergleicht man die beiden obigen Beobachtungen mit einander, so bemerkt man, dass  $\theta_3$  der zweiten nur um  $15'$  grösser ist als  $\theta_1$  der ersten, und dass die nachfolgenden Differenzen selten um mehr als  $15'$  schwanken, und zwar hat die zweite Beobachtung das stete Bestreben, ihre  $\theta$  um  $15'$  höher anzugeben; ja die letztbeobachteten Winkel zeigen dieselbe Differenz ( $15'$ ), ein Beweis, wie gut die Kugel geschwungen hat. Die einzige Ausnahme machen  $\theta_4 = 47^\circ 10'$  und  $\theta_6 = 48^\circ$ , wo sich ein grösserer Beobachtungsfehler eingeschlichen hat.

Die vorkommenden Abweichungen von der Differenz  $= 15'$  rühren überhaupt von Beobachtungsfehlern, so wie auch von der nicht strengen Messung her, denn die letztere geschah mittelst eines Transporteurs, welcher bloss in halbe Grade abgetheilt war.

Bildet man für beide Beobachtungen eine erste Differenzenreihe, indem stets  $\theta_{n+1}$  von  $\theta_n$  abgezogen wird, so überzeugt man sich bald, dass diejenige der zweiten Beobachtung mehr Regelmässigkeit zeigt, als diejenige der ersten. Wir benutzen daher für unsere Untersuchung die zweite Beobachtung als die zuverlässigere. — Formirt man aus der ersten Differenzenreihe nochmals eine zweite, so kommt in derselben ein gar unregelmässiges Schwanken, d. h. ein solches Fallen und Steigen zum Vorschein, welches in Wirklichkeit unmöglich existiren kann. Diese Bemerkung bietet ein ziemlich genaues Korrektionsmittel dar. Man bildet sich nemlich aus der zweiten Differenzenreihe eine neue zweite Differenzenreihe, welche fallend ist, aber beim Ansteigen auf die erste Differenzenreihe und von dieser auf die ursprüngliche Reihe, in der letztern keine Winkel erzeugt, welche von den beobachteten zu sehr verschieden wären. Wir gewinnen demnach unsere corrigirten  $\theta$  mittelst folgender Reihen:

## Ursprüngliche Werthe.

## Neue Werthe.

$\theta$	$\Delta\theta$	$\Delta^2\theta$	$\Delta^2\theta$	$\Delta\theta$	$\theta$
$\theta_1 = 63^\circ 50'$					$\theta_1 = 63^\circ 50'$
$\theta_2 = 59^\circ 30'$	$4^\circ 20'$			$4^\circ 20'$	$\theta_2 = 59^\circ 30'$
$\theta_3 = 56^\circ$	$3^\circ 30'$	$50'$	$50'$	$3^\circ 30'$	$\theta_3 = 56^\circ$
$\theta_4 = 52^\circ 45'$	$3^\circ 15'$	$15'$	$30'$	$3^\circ$	$\theta_4 = 53^\circ$
$\theta_5 = 50^\circ$	$2^\circ 45'$	$30'$	$18'$	$2^\circ 42'$	$\theta_5 = 50^\circ 18'$
$\theta_6 = 48^\circ$	$2^\circ$	$45'$	$12'$	$2^\circ 30'$	$\theta_6 = 47^\circ 48'$
$\theta_7 = 45^\circ 15'$	$2^\circ 45'$	$-45'$	$10'$	$2^\circ 20'$	$\theta_7 = 45^\circ 28'$
$\theta_8 = 43^\circ 15'$	$2^\circ$	$45'$	$10'$	$2^\circ 10'$	$\theta_8 = 43^\circ 18'$
$\theta_9 = 41^\circ$	$2^\circ 15'$	$-15'$	$10'$	$2^\circ$	$\theta_9 = 41^\circ 18'$
$\theta_{10} = 39^\circ 45'$	$1^\circ 15'$	$1^\circ$	$10'$	$1^\circ 50'$	$\theta_{10} = 39^\circ 28'$
$\theta_{11} = 37^\circ 50'$	$1^\circ 55'$	$-40'$	$9'$	$1^\circ 41'$	$\theta_{11} = 37^\circ 47'$
$\theta_{12} = 36^\circ 45'$	$1^\circ 5'$	$50'$	$9'$	$1^\circ 32'$	$\theta_{12} = 36^\circ 15'$
$\theta_{13} = 35^\circ 10'$	$1^\circ 35'$	$-30'$	$9'$	$1^\circ 23'$	$\theta_{13} = 34^\circ 52'$
$\theta_{14} = 33^\circ 45'$	$1^\circ 25'$	$10'$	$9'$	$1^\circ 14'$	$\theta_{14} = 33^\circ 38'$
$\theta_{15} = 32^\circ 40'$	$1^\circ 5'$	$20'$	$8'$	$1^\circ 6'$	$\theta_{15} = 32^\circ 32'$
$\theta_{16} = 31^\circ 30'$	$1^\circ 10'$	$-5'$	$6'$	$1^\circ$	$\theta_{16} = 31^\circ 32'$
$\theta_{17} = 30^\circ 30'$	$1^\circ$	$10'$	$4'$	$56'$	$\theta_{17} = 30^\circ 36'$
$\theta_{18} = 29^\circ 30'$	$1^\circ$	$0$	$2'$	$54'$	$\theta_{18} = 29^\circ 42'$
$\theta_{19} = 28^\circ 45'$	$45'$	$15'$	$2'$	$52'$	$\theta_{19} = 28^\circ 50'$
$\theta_{20} = 28^\circ$	$45'$	$0$	$2'$	$50'$	$\theta_{20} = 28^\circ$
$\theta_{21} = 27^\circ$	$1^\circ$	$-15'$	$2'$	$48'$	$\theta_{21} = 27^\circ 12'$
$\theta_{22} = 26^\circ 30'$	$30'$	$30'$	$2'$	$46'$	$\theta_{22} = 26^\circ 26'$
$\theta_{23} = 25^\circ 45'$	$45'$	$-15'$	$2'$	$44'$	$\theta_{23} = 25^\circ 42'$
$\theta_{24} = 25^\circ$	$45'$	$0$	$2'$	$42'$	$\theta_{24} = 25^\circ$
$\theta_{25} = 24^\circ 20'$	$40'$	$5'$	$2'$	$40'$	$\theta_{25} = 24^\circ 20'$
$\theta_{26} = 23^\circ 40'$	$40'$	$0$	$2'$	$38'$	$\theta_{26} = 23^\circ 42'$
$\theta_{27} = 23^\circ$	$40'$	$0$	$2'$	$36'$	$\theta_{27} = 23^\circ 6'$
$\theta_{28} = 22^\circ 30'$	$30'$	$10'$	$2'$	$34'$	$\theta_{28} = 22^\circ 32'$
$\theta_{29} = 22^\circ$	$30'$	$0$	$2'$	$32'$	$\theta_{29} = 22^\circ$
$\theta_{30} = 21^\circ 30'$	$30'$	$0$	$2'$	$30'$	$\theta_{30} = 21^\circ 30'$
$\theta_{31} = 21^\circ$	$30'$	$0$	$1'$	$29'$	$\theta_{31} = 21^\circ 1'$
$\theta_{32} = 20^\circ 30'$	$30'$	$0$	$1'$	$28'$	$\theta_{32} = 20^\circ 33'$
$\theta_{33} = 20^\circ$	$30'$	$0$	$1'$	$27'$	$\theta_{33} = 20^\circ 6'$
$\theta_{34} = 19^\circ 45'$	$15'$	$15'$	$1'$	$26'$	$\theta_{34} = 19^\circ 40'$
$\theta_{35} = 19^\circ 15'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$25'$	$\theta_{35} = 19^\circ 15'$
$\theta_{36} = 19^\circ$	$15'$	$15'$	$1'$	$24'$	$\theta_{36} = 18^\circ 51'$
$\theta_{37} = 18^\circ 30'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$23'$	$\theta_{37} = 18^\circ 28'$
$\theta_{38} = 18^\circ 15'$	$15'$	$15'$	$1'$	$22'$	$\theta_{38} = 18^\circ 6'$
$\theta_{39} = 17^\circ 45'$	$30'$	$-15'$	$1'$	$21'$	$\theta_{39} = 17^\circ 45'$
$\theta_{40} = 17^\circ 30'$	$15'$	$15'$	$1'$	$20'$	$\theta_{40} = 17^\circ 25'$

Ist nun  $u_n$  ein Werth, der die Gleichung

$$\frac{\cos\theta_n + u\sin\theta_n}{\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1}} = e^{u(\theta_n + \theta_{n+1})}$$

beinahe befriedigt, so ist der Korrektionswerth

$$h = \frac{e^{u(\theta_n + \theta_{n+1})}(\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1}) - \cos\theta_n - u\sin\theta_n}{\sin\theta_n + \sin\theta_{n+1} \cdot e^{u(\theta_n + \theta_{n+1})} - (\theta_n + \theta_{n+1})e^{u(\theta_n + \theta_{n+1})}(\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})}$$

Diese Gleichungen verschaffen uns zuerst eine Relation zwischen  $\alpha_1$  und  $\beta_1$ . Je mehr nemlich die Winkel  $\theta_m$  abnehmen, desto kleiner werden auch die Differenzen zwischen je zweien unmittelbar auf einander folgenden; und sind sie unendlich klein geworden, so sind jene Differenzen unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung. Demnach kann man, wenn  $\theta_n$  und  $\theta_{n+1}$  unendlich klein gedacht werden, setzen

$$\theta_n = \theta_{n+1},$$

**so wie**

$$\sin \theta_n = \sin \theta_{n+1} = \theta_n, \quad \cos \theta_n = \cos \theta_{n+1} = 1.$$

Macht man in  $X_n$  und  $Y_{n+1}$ , so wie in den entwickelten Werthen  $\partial_u X_n$  und  $\partial_u Y_{n+1}$ , diese Substitutionen, so erscheint in denselben  $\theta$  weder in der Potenz Null noch Eins, sondern nur in höhern Potenzen. Die letzte der Gleichungen 10) wird daher, da gegen  $\theta^1_n$  alle übrigen Potenzen verschwinden:

$$\alpha_1 \theta_n = \beta_1 \theta_{n+1} \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \beta_1.$$

**Zieht man unter den Gleichungen 10) die zweite von der ersten, die dritte von der zweiten und so je die nachfolgende von der vorhergehenden ab, so erzeugen sich unter anderen die Differenzen:**

$$X_{n-1} - X_n,$$

$$Y_n - Y_{n+1},$$

$$\partial_u X_{n-1} - \partial_u X_n,$$

$$\partial_u Y_n - \partial_u Y_{(n+1)}.$$

$X_{n-1}$  und  $\partial_u X_{n-1}$  entstehen beziehungsweise aus  $X_n$  und  $\partial_u X_n$  dadurch, dass in letztern  $\theta_n$  einen Zuwachs  $\theta_{n-1} - \theta_n$ , so wie  $Y_n$  und  $\partial_u Y_u$  aus  $Y_{n+1}$  und  $\partial_u Y_{n+1}$  dadurch, dass in letztern  $\theta_{n+1}$  einen Zuwachs  $\theta_n - \theta_{n+1}$  erlitten hat. Wir können daher



$$X_n = \frac{2g}{(1+u^2)l} [\cos\theta + u\sin\theta - (\cos\theta_n + u\sin\theta_n)e^{-u(\theta_n-\theta)}],$$

$$Y_{n+1} = \frac{2g}{(1+u^2)l} [\cos\theta - u\sin\theta - (\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})e^{u(\theta_{n+1}-\theta)}];$$

und wo  $n$  jede ganze Zahl vorstellen kann, hingegen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$ , so wie  $u$  noch zu bestimmende Coefficienten sind. Für  $\theta=0$  sind je beide Werthe von  $\partial\theta$  einander gleich. So viele Werthe man daher  $n$  zuweist, so viele Gleichungen werden aus 7) und 8) entspringen, welche zur Bestimmung der Coefficienten  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  dienen. Diese Gleichungen sind:

[illegible]

**wobei aber jetzt**

$$X_n = \frac{2g}{(1+u^2)l} [1 - (\cos\theta_n + u\sin\theta_n)e^{-u\theta_n}],$$

$$Y_{n+1} = \frac{2g}{(1+u^2)l} [1 - (\cos\theta_{n+1} - u\sin\theta_{n+1})e^{u\theta_{n+1}}].$$

Die oben gefundenen Werthe von  $u$  sind offenbar grösser als das wahre  $u$ , denn jene geben den ganzen Widerstand  $\gamma = \frac{1}{2} u_m v^2$ , während  $\frac{1}{2} uv^2$  nur einen Theil desselben darstellt. Das wahre  $u$  ist demnach kleiner anzurechnen, als der kleinste Werth  $u_m$ . Ge-  
setzt, es sei ein Werth  $u$ , der dem wahren so nahe kommt, dass man von der Korrektur  $h$  alle höheren Potenzen vernachlässigen kann, so gehen dadurch obige Gleichungen 9) über in:

$$\partial_{\theta_n} X_n = \frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} \sin\theta_n,$$

$$\partial_{\theta_n}^2 X_n = \frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} \cos\theta_n;$$

$$\partial_{\theta_{n+1}} Y_{n+1} = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} \sin\theta_{n+1},$$

$$\partial_{\theta_{n+1}}^2 Y_{n+1} = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} \cos\theta_{n+1};$$

$$\partial_{u,\theta_n}^2 X_n = -\frac{2g}{l} \theta_n e^{-u\theta_n} \sin\theta_n,$$

$$\partial_u [\partial_{\theta_n}^2 X_n] = -\frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} (\sin\theta_n + \theta_n \cos\theta_n);$$

$$\partial_{u,\theta_{n+1}}^2 Y_{n+1} = \frac{2g}{l} \theta_{n+1} e^{u\theta_{n+1}} \sin\theta_{n+1},$$

$$\partial_u [\partial_{\theta_{n+1}}^2 Y_{n+1}] = \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} (\sin\theta_{n+1} + \theta_{n+1} \cos\theta_{n+1}).$$

So ergibt sich endlich die, alle aus 10) entstehenden Gleichungen repräsentirende Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{2g}{l} e^{-u\theta_n} (\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \sin \theta_n + \frac{1}{2} \cos \theta_n (\theta_{n-1} - \theta_n) \right] \\ & - \frac{2g}{l} h e^{-u\theta_n} (\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \theta_n \sin \theta_n + \frac{1}{2} (\theta_{n-1} - \theta_n) (\sin \theta_n + \theta_n \cos \theta_n) \right] \\ & + \alpha_1 (\theta_{n-1} - \theta_n) + \alpha_2 (\theta_{n-1}^2 - \theta_n^2) \dots \end{aligned} \right\} \tag{12}$$
$$= \frac{2g}{l} e^{u\theta_{n+1}} (\theta_n - \theta_{n+1}) \left[ \sin \theta_{n+1} + \frac{1}{2} \cos \theta_{n+1} (\theta_n - \theta_{n+1}) \right]$$
$$+ \frac{2g}{l} h e^{u\theta_{n+1}} (\theta_n - \theta_{n+1}) \left[ \theta_{n+1} \sin \theta_{n+1} + \frac{1}{2} (\theta_n - \theta_{n+1}) (\sin \theta_{n+1} + \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}) \right]$$
$$+ \alpha_1 (\theta_n - \theta_{n+1}) + \beta_2 (\theta_n^2 - \theta_{n+1}^2) \dots$$

Ich multiplicire diese Gleichung mit  $\frac{l}{2g}$ , lasse aber  $\frac{\alpha_m l}{2g}$  und  $\frac{\beta_m l}{2g}$  dennoch durch  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  dargestellt sein, wobei man hernach, um die ursprünglichen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  wieder herzustellen, die gefundenen Werthe noch mit  $\frac{2g}{l}$  zu multipliciren hat. Hierauf setze ich

$$\begin{aligned} & -e^{-u\theta_n}(\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \sin\theta_n + \frac{1}{2} \cos\theta_n(\theta_{n-1} - \theta_n) \right] \\ & + e^{u\theta_{n+1}}(\theta_n - \theta_{n+1}) \left[ \sin\theta_{n+1} + \frac{1}{2} \cos\theta_{n+1}(\theta_n - \theta_{n+1}) \right] = A_n, \\ & e^{-u\theta_n}(\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \theta_n \sin\theta_n + \frac{1}{2} (\sin\theta_n + \theta_n \cos\theta_n)(\theta_{n-1} - \theta_n) \right] \\ & + e^{u\theta_{n+1}}(\theta_n - \theta_{n+1}) \left[ \theta_{n+1} \sin\theta_{n+1} + \frac{1}{2} (\sin\theta_{n+1} + \theta_{n+1} \cos\theta_{n+1})(\theta_n - \theta_{n+1}) \right] \\ & = B_n. \end{aligned}$$

Diese beiden Grössen nehmen durch Entwicklung der Exponentialfunktionen  $e^{-u\theta_n}$  und  $e^{u\theta_{n+1}}$  in  $1 - u\theta_n$  und  $1 + u\theta_{n+1}$  und unter Vernachlässigung der Produkte  $u(\theta_{n-1} - \theta_n)^2$  und  $u(\theta_n - \theta_{n+1})^2$  eine zur Auswerthung bequemere Form an. Setze ich nemlich

$$\begin{aligned} & (\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \sin\theta_n + \frac{1}{2} \cos\theta_n(\theta_{n-1} - \theta_n) \right] = P_n, \\ & (\theta_{n-1} - \theta_n) \left[ \theta_n \sin\theta_n + \frac{1}{2} (\theta_n \cos\theta_n + \sin\theta_n)(\theta_{n-1} - \theta_n) \right] = Q_n; \\ & u\theta_n(\theta_{n-1} - \theta_n) \sin\theta_n = p_n, \\ & u\theta_n^2(\theta_{n-1} - \theta_n) \sin\theta_n = q_n; \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} A_n &= P_{n+1} + p_{n+1} - P_n + p_n, \\ B_n &= Q_{n+1} + q_{n+1} + Q_n - q_n; \end{aligned}$$

und dabei kann man noch bemerken, dass

$$\begin{aligned} Q_n &= \theta_n P_n + \frac{1}{2} (\theta_{n-1} - \theta_n)^2 \sin\theta_n, \\ q_n &= \theta_n p_n; \end{aligned}$$

$$\theta_n = \Delta^1_n,$$

$$\theta^2_n = \Delta^2_n,$$

$$\dots$$

$$-\theta^m_n = \Delta^m_n;$$

nicht mit der  $m$ ten Potenz von  $\Delta_n$ ,  
sondern die Gleichung 12) über in

$$+\Delta^2_{n+1}\beta_2 + \Delta^3_{n+1}\beta_3 \dots$$

$$\Delta^2_n - \Delta^3_n \alpha_3 \dots = 0.$$

Wir berechnen nach und nach durch Setzung  
von  $\theta$  gerechnet, für  $n$ , alle diejenigen  
Werte, mittelst deren sich die Coefficien-  
ten lassen.

Die Coefficienten  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  alle positiv  
sein, in der Folge rechtfertigen oder  
heraus, dass dieselben convergirende  
der Seiten der Gleichungen 10) das  
Ueberschwindigkeit ( $\partial\theta^2$ ) im tiefsten  
diese Geschwindigkeit für den Fall  
haben, wenn die Winkel  $\theta$  zunehmen,  
als die Einheit überschritten haben.

Wir können wir uns also auf eine  
Zahl beschränken.

Endlich  $h$ , die  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  bestimmt,  
wie, wie oben bemerkt, noch mit

$$- \frac{1}{200} \cos \psi^2),$$

Pol und  $\psi$  die Breite des Orts ist.

Par. Fuss,  $\psi = 48^\circ 40'$ , während  
heraus folgt, dass man auch für Tutt-

30,1953.

$$l = r + \frac{2}{5} \cdot \frac{A^2}{r} \cdot \frac{1-k^5}{1-k^3}.$$

In Par. Fuss findet sich

$$r = 24,32138.$$

und

$$A = 0,455965.$$

Nun ist das Volumen der Hohlkugel

$$= \frac{4}{3} \pi A^3 (1-k^3),$$

die Dichtigkeit des Tannenholzes

$$= 0,555;$$

der Par. Cubikfuss reines Wasser wiegt 73 Pfd. 5 L. 1 Q. W  
tembergisch, während das Gewicht unserer Hohlkugel ist:

$$8 \text{ Pfd. } 12\frac{1}{2} \text{ Loth.}$$

Demnach ist

$$\frac{4}{3} \pi A^3 (1-k^3) \cdot 0,555 \cdot 9365 = 1074.$$

Daraus berechnet man

$$\log(1-k^5) = 0,71632033 - 1$$

und

$$\log(1-k^3) = 0,84888153 - 1.$$

Diess Alles gibt

$$l = 24,326019$$

und

$$\frac{2g}{l} = 2,482593.$$

Um aus den so gewonnenen Werthen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  au  
Coefficienten  $p_m$  zurückzusteigen, wird man für  $n$  einen l  
bigen Werth annehmen, und aus 7) die verschiedenen Pote  
von  $\partial\theta$ , so wie auch das Differential  $\partial^2\theta$  in die Gleichun  
setzen und alle Coefficienten der verschiedenen Potenzen  
auch Funktionen von  $\theta$  für sich der Null gleich machen. Zu

ser gegenseitiger Unterstützung mag es gereichen, wenn man zwischen 8) und 1) dasselbe thut.

Das letzte Geschäft aber wird sein, nachzusehen, ob die Funktion

$$\gamma = p_1 v + p_2 v^2 + p_3 v^3 + p_4 v^4 + \dots$$

nicht die Entwicklung einer geschlossenen Funktion von  $v$  ist — möglicher Weise ein leichtes Geschäft.

Die einfachste und vielleicht beste Art, zum Zweck zu gelangen, möchte aber folgende sein:

Man nehme eine gut gearbeitete aus papierdünnem Blech bestehende Hohlkugel von  $\frac{1}{2}$  bis 1 Schuh im Durchmesser, lasse sie bei Windstille von verschiedenen gemessenen Höhen fallen und beobachte die Fallzeit.

Hält man eine gewöhnliche Taschenuhr an das Ohr, deren Zeiger  $\frac{1}{6}$  bis  $\frac{1}{8}$  Sekunden anzeigt\*), so kann man mit dem Zählen der Schläge ganz bequem nachkommen, wofern man nur von 1 bis 12 zählt. Will man aber noch weiter zählen, so fängt man abermal mit 1 an und addirt die neue Zahl zu 12 u. s. w. Verschafft man sich nun einen sehr guten und genau regulirten Chronometer dieser Art, so wird man präcis auf einen Schlag desselben die Kugel fallen lassen und die Zeitabschnitte bis dahin zählen, wo die Kugel auffällt. Trifft aber der Moment des Auffallens nicht mit einem Schlag des Chronometers zusammen, so wiederhole man das Experiment unter Vergrößerung oder Verkleinerung der Fallhöhe so lange, bis ein Zutreffen erfolgt. Fünf bis acht Beobachtungen, die man in einer Kirche und von einem Thurme herab machen kann, genügen. Damit die Kugel nicht beschädigt werde, fange man sie durch ein Falltuch, besser durch ein weitgestricktes Fallnetz, auf.

Zählt man die Fallhöhe  $x$  vom Anfang des Falls an, und setzt die Zeit gleich  $t$ , so kann man die Gleichung aufstellen:

$$x = \alpha_1 t^1 + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \dots$$

---

\*) Die Uhr des Verfassers z. B. macht in 1 Minute genau 288 Schläge; folglich kann man vermittelst derselben  $\frac{60}{288}$  oder  $\frac{5}{24}$  Secunden unterscheiden.

deren Coefficienten  $\alpha_n$  aus den Beobachtungen leicht zu bestimmen sind. Der Kürze wegen setzen wir

$$x = f(t).$$

Bezeichnen wir noch den Widerstand der Luft durch  $\varphi(v)$ , so hat man bekanntlich die Bewegungsgleichung

$$\hat{c}r = g - \varphi(r),$$

wo  $\partial r$  die in Beziehung auf  $t$  genommene Ableitung ist. Daraus folgt

$$\varphi(r) = g - \partial r.$$

Setzen wir ferner

$$\partial f(t) = f'(t) \quad \text{und} \quad \partial^2 f(t) = f''(t);$$

so leiten wir aus  $x = f(t)$  ab:

$$v = \partial x = f'(t)$$

und

$$\partial v = f''(t).$$

Demnach haben wir

$$\varphi(r) = g - f''(t).$$

Wollen wir aber  $\varphi(v)$  in  $v$  dargestellt sehen, so müssen wir zwischen dieser und der Gleichung

$$v = f'(t)$$

$t$  eliminiren.

**Bemerkung.** Ist  $\varphi(v) = mv^2$ , so hat man (nach Ohm's Mechanik I. Thl. S. 342.)

$$x = \frac{k^2}{g} \cdot \log \left( \frac{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}{2} \right),$$

wo  $k = \sqrt{\frac{g}{m}}.$



Entwickelt man  $x$  in eine Reihe, die nach Potenzen von  $\frac{1}{k}$  fortgeht, so hat man

$$x = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{g^3 \cdot t^4}{12} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots$$

Hat man Grund anzunehmen, dass  $\frac{1}{k}$  eine sehr kleine Zahl ist, so kann füglich mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden, und sind  $x_1$  und  $t_1$  zwei zusammengehörige Beobachtungswerthe, so hat man

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{m}{g} = 12 \frac{\frac{1}{2}gt_1^2 - x_1}{g^3t_1^3}.$$

Sind  $t_2$  und  $x_2$  zwei andere Beobachtungswerthe, so muss, wenn das Neuton'sche Gesetz richtig ist, sein:

$$\frac{\frac{1}{2}gt_1^2 - x_1}{t_1^3} = \frac{\frac{1}{2}gt_2^2 - x_2}{t_2^3}.$$

**XVI.****Venus im grössten Glanze.**

Von  
dem Herausgeber.

---

Das vorige Jahr (1852) bot uns das interessante Schauspiel dar, dass Venus bei hellem Tage am Himmel glänzte. Im Jahre 1716 betrachtete das Volk in London diese Erscheinung als ein Wunder und als ein drohendes Vorzeichen nahen Unglücks, und im Jahre 1750 wurde der nicht minder unwissende Pöbel von Paris durch dieses Phänomen so aufgeregt, dass es nöthig wurde, die Hülfe der Polizei in Anspruch zu nehmen, um dem Tumulte Einhalt zu thun\*). Der berühmte Halley hat in den Philosophical Transactions. Nr. 349. die Zeit des grössten Glanzes der Venus zu bestimmen gelehrt. Weil dieser Gegenstand nur in wenigen astronomischen Werken behandelt worden ist, weil derselbe eine interessante Aufgabe für die Lehre von den Maximis und Minimis darbietet, und weil dabei vielleicht noch Einiges zu bemerken sein dürfte, was man bis jetzt unbeachtet gelassen hat, so will ich die betreffende Aufgabe im Folgenden auflösen.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, dass sowohl die Entfernung der Venus von der Sonne, als auch die Entfernung der Erde von der Sonne constant sei, was wegen der geringen Excentricitäten der Bahnen dieser beiden Weltkörper bei diesem

---

\*) S. Wunder des Himmels von Littrow. Vierte Auflage. S. 290.

Gegenstände mit hinreichender Annäherung verstattet ist. Ausserdem werden wir zu der näherungsweise Annahme berechtigt sein, dass die Venus halb von der Sonne erleuchtet wird, und dass dasselbe auch der Fall sein würde, wenn die Erde ein selbstleuchtender Körper wäre, welcher der Venus sein Licht zusendete. Alle anderen genaueren Betrachtungen würden im vorliegenden Falle die Aufgabe unnöthigerweise compliciren. Dies vorausgesetzt, wird nun gewiss alles Folgende vollständig verständlich sein.

In Taf. III. Fig. 7. sei die Ebene des Papiers die durch die Mittelpunkte  $S_1$ ,  $E_1$ ,  $V_1$  der Sonne, der Erde und der Venus gelegte Ebene. Diese Ebene werde in dem Halbkreise  $ACB$  von der erleuchteten Hälfte der Oberfläche der Venus geschnitten. Denken wir uns nun eine den um  $V$  beschriebenen Kreis in  $D$  berührende Parallele mit  $EV$  gezogen, so wird die in Rede stehende Ebene in dem Bogen  $BCD$  von dem der Erde zu Gesicht kommenden Theile der erleuchteten Hälfte der Venus geschnitten. Die von der Sonne erleuchtete Hälfte der Venus und den der Erde zu Gesicht kommenden Theil derselben wollen wir jetzt respective auf die grössten Kreise der Venus, deren Durchmesser  $AB$  und  $DE$  sind, projeciren, so ist das Verhältniss dieser Projectionen, wenn wir den Winkel  $S_1 V_1 E_1$  durch  $\omega$  bezeichnen, offenbar

$$1:\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \omega = 1:\frac{1}{2} (1 + \cos \omega) = 1:\cos \frac{1}{2} \omega^2.$$

Denken wir uns überhaupt eine erleuchtete Ebene  $F$  in zwei verschiedenen Entfernungen  $e$  und  $e_1$  von dem Auge, und bezeichnen den Glanz, mit welchem dieselbe dem Auge erscheint, respective durch  $g$  und  $g_1$ , so verhalten sich  $g$  und  $g_1$  offenbar eben so zu einander wie die Grundflächen  $f$  und  $f_1$  der durch die Pupille auf die Netzhaut fallenden Strahlenkegel von derselben Höhe  $h$ , so dass also

$$g:g_1 = f:f_1$$

ist. Nun ist aber nach den Lehren der Geometrie bekanntlich offenbar

$$F:f = e^2:h^2,$$

$$F:f_1 = e_1^2:h^2;$$

also  $fe^2 = f_1 e_1^2$ , woraus

$$f:f_1 = e_1^2:e^2,$$

daher nach dem Obigen

$$g:g_1 = e_1^2:e^2$$

folgt; d. h.  $g$  und  $g_1$  verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen der Ebene  $F$  von dem Auge. Bezeichnen wir daher den Glanz der erleuchteten Hälfte der Venus in einer der Längeneinheit gleichen Entfernung von der Erde durch  $\mathfrak{G}$ , den Glanz der erleuchteten Hälfte der Venus in der Entfernung  $E$  von der Erde dagegen durch  $\mathfrak{G}_1$ ; so ist

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1 = E^2 : 1.$$

Bezeichnet aber  $G$  den Glanz des der Erde zu Gesicht kommenden Theils der erleuchteten Hälfte der Venus in der Entfernung  $E$  derselben von der Erde, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\mathfrak{G}_1 : G = 1 : \cos \frac{1}{2} \omega^2.$$

Durch Zusammensetzung der beiden Proportionen

$$\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_1 = E^2 : 1,$$

$$\mathfrak{G}_1 : G = 1 : \cos \frac{1}{2} \omega^2$$

erhält man

$$\mathfrak{G} : G = E^2 : \cos \frac{1}{2} \omega^2,$$

also

$$G = \frac{\cos \frac{1}{2} \omega^2}{E^2} \mathfrak{G},$$

oder wenn man, was offenbar verstattet ist,  $\mathfrak{G}$  als Einheit des Glanzes annimmt:

$$G = \frac{\cos \frac{1}{2} \omega^2}{E^2}.$$

Indem wir nun die constante Entfernung der Erde von der Sonne durch  $R$ , die constante Entfernung der Venus von der Sonne durch  $r$ , den Winkel  $E_1 S_1 V_1$  an der Sonne durch  $\theta$ , den Winkel  $S_1 E_1 V_1$  an der Erde durch  $\bar{\omega}$  bezeichnen, wollen wir uns die Frage vorlegen, wie gross der Winkel  $\theta$ , den wir im Folgenden als die unabhängige veränderliche Grösse betrachten werden, sein muss, wenn der Glanz

$$G = \frac{\cos \frac{1}{2} \omega^2}{E^2}$$

ein Maximum werden soll.

Bringen wir die vorstehende Gleichung auf die Form

$$G = E^{-2} \cos \frac{1}{2} \omega^2,$$

und differentiiren dann in Bezug auf  $\theta$  als unabhängige veränderliche Grösse, so erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 2E^{-2} \cos \frac{1}{2} \omega \frac{\partial \cos \frac{1}{2} \omega}{\partial \theta} - 2E^{-3} \cos \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial E}{\partial \theta}$$

oder

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -E^{-2} \sin \frac{1}{2} \omega \cos \frac{1}{2} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - 2E^{-3} \cos \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial E}{\partial \theta},$$

also

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{\sin \omega}{2E^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \omega^2}{E^3} \frac{\partial E}{\partial \theta}.$$

Nun ist

$$R:r = \sin \omega : \sin(\omega + \theta)$$

oder

$$r \sin \omega = R \sin(\omega + \theta),$$

also

$$r \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = R \cos(\omega + \theta) \cdot \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right),$$

oder

$$r \cos \omega \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -R \cos \bar{\omega} \cdot \left(1 + \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right),$$

woraus

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -\frac{R \cos \bar{\omega}}{r \cos \omega + R \cos \bar{\omega}},$$

oder auch, weil

$$E = r \cos \omega + R \cos \bar{\omega}$$

ist:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = - \frac{R \cos \bar{\omega}}{E}$$

folgt. Ferner ist

$$E^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta,$$

also

$$E \frac{\partial E}{\partial \theta} = Rr \sin \theta, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{Rr \sin \theta}{E}.$$

Führt man die gefundenen Ausdrücke von  $\frac{\partial \omega}{\partial \theta}$  und  $\frac{\partial E}{\partial \theta}$  in den obigen Ausdruck von  $\frac{\partial G}{\partial \theta}$  ein, so erhält man

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{R \sin \omega \cos \bar{\omega}}{2E^3} - \frac{2Rr \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta}{E^4};$$

und weil nun die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$$

ist, so ergibt sich die Gleichung

$$E \sin \omega \cos \bar{\omega} = 4r \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta$$

oder

$$E \sin \frac{1}{2} \omega \cos \bar{\omega} = 2r \cos \frac{1}{2} \omega \sin \theta.$$

Bekanntlich ist aber

$$E:r = \sin \theta : \sin \bar{\omega}$$

oder

$$E \sin \bar{\omega} = r \sin \theta;$$

also ist, wenn man mit dieser Gleichung in die vorstehende Gleichung

$$E \sin \frac{1}{2} \omega \cos \bar{\omega} = 2r \cos \frac{1}{2} \omega \sin \theta$$

dividirt:

$$\sin \frac{1}{2} \omega \cot \bar{\omega} = 2 \cos \frac{1}{2} \omega,$$

oder

$$\cot \bar{\omega} = 2 \cot \frac{1}{2} \omega,$$

oder

$$\tan \frac{1}{2} \omega = 2 \tan \bar{\omega}.$$

Diese schon von Halley gefundene Gleichung drückt die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums aus, und mittelst derselben muss also der Winkel  $\theta$ , so wie auch die Winkel  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  bestimmt werden.

Um nun den Winkel  $\bar{\omega}$  zu bestimmen, verbinden wir mit der Gleichung

$$\tan \frac{1}{2} \omega = 2 \tan \bar{\omega}$$

die Gleichung

$$r \sin \omega = R \sin \bar{\omega}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$R \sin \bar{\omega} = \frac{2r \tan \frac{1}{2} \omega}{1 + \tan \frac{1}{2} \omega^2},$$

also wegen der Halley'schen Gleichung:

$$R \sin \bar{\omega} = \frac{4r \tan \bar{\omega}}{1 + 4 \tan \bar{\omega}^2},$$

folglich

$$R = \frac{4r \cos \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega}^2 + 4 \sin \bar{\omega}^2} = \frac{4r \cos \bar{\omega}}{4 - 3 \cos \bar{\omega}^2},$$

woraus sich

$$\cos \bar{\omega}^2 + \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{R} \cos \bar{\omega} = \frac{4}{3}$$

ergibt. Löst man nun diese Gleichung in Bezug auf  $\cos \bar{\omega}$  als unbekannte Grösse auf, so erhält man:

$$\cos \bar{\omega} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R} \pm \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{4}{9} \cdot \frac{r^2}{R^2}}$$

oder

$$\cos \bar{\omega} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R} \left\{ -1 \pm \sqrt{1 + 3 \left( \frac{R}{r} \right)^2} \right\}.$$

Setzt man

$$\tan x = \frac{R}{r} \sqrt{3},$$

wo man immer  $x$  zwischen  $0$  und  $90^\circ$  nehmen kann, so ist

$$\cos \bar{\omega} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R} (-1 \pm \sec x),$$

oder, weil

$$\frac{r}{R} = \sqrt{3} \cdot \cot x, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \cot x$$

ist:

$$\cos \bar{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \cot x (-1 \pm \sec x).$$

Nun ist aber

$$-1 + \sec x = \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \tan x \tan \frac{1}{2} x,$$

$$-1 - \sec x = -\frac{1 + \cos x}{\cos x} = -\tan x \cot \frac{1}{2} x;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos \bar{\omega} = \begin{cases} +\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \tan \frac{1}{2} x, \\ -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \cot \frac{1}{2} x. \end{cases}$$



Da  $x$  zwischen 0 und  $90^\circ$ , also  $\frac{1}{2}x$  zwischen 0 und  $45^\circ$  liegt, so ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} x < 1,$$

also

$$\cot \frac{1}{2} x > 1,$$

weil

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} x \cot \frac{1}{2} x = 1$$

ist. Folglich ist auch um so mehr

$$\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \cot \frac{1}{2} x > 1,$$

und daher die Gleichung

$$\cos \bar{\omega} = -\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \cot \frac{1}{2} x$$

jedenfalls unzulässig, weshalb man zur Bestimmung von  $\bar{\omega}$  bloss die beiden folgenden Formeln hat:

$$\operatorname{tang} x = \frac{R}{r} \sqrt{3}, \quad \cos \bar{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} x;$$

wo man  $x$  zwischen 0 und  $90^\circ$  nimmt. Hat man aber mittelst dieser Formeln  $\bar{\omega}$  gefunden, so ergibt sich  $\omega$  mittelst der Formel

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega = 2 \operatorname{tang} \bar{\omega}$$

ohne alle Zweideutigkeit, und  $\theta$  findet man endlich mittelst der Formel

$$\theta = 180^\circ - (\omega + \bar{\omega}).$$

Die Entfernung  $E$  berechnet man leicht mittelst der Formel

$$E = \frac{r \sin \theta}{\sin \bar{\omega}},$$

oder auch mittelst der Formel

$$E = r \cos \omega + R \cos \bar{\omega}.$$

Uebrigens kann man  $E$  auch noch auf folgende Art ausdrücken. Weil

$$R = \frac{r \tan x}{\sqrt{3}}, \quad \cos \bar{\omega} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \tan \frac{1}{2} x}$$

ist, so ist

$$R \cos \bar{\omega} = \frac{2}{3} r \tan x \tan \frac{1}{2} x,$$

oder auch

$$R \cos \bar{\omega} = \frac{4}{3} r \cdot \frac{\tan \frac{1}{2} x^2}{1 - \tan \frac{1}{2} x^2}.$$

Ferner ist

$$\cos \omega = \frac{1 - \tan \frac{1}{2} \omega^2}{1 + \tan \frac{1}{2} \omega^2} = \frac{1 - 4 \tan \bar{\omega}^2}{1 + 4 \tan \bar{\omega}^2}$$

oder

$$\cos \omega = \frac{\cos \bar{\omega}^2 - 4 \sin \bar{\omega}^2}{\cos \bar{\omega}^2 + 4 \sin \bar{\omega}^2} = \frac{5 \cos \bar{\omega}^2 - 4}{4 - 3 \cos \bar{\omega}^2},$$

also nach dem Obigen:

$$\cos \omega = \frac{20 \tan \frac{1}{2} x^2 - 12}{12 (1 - \tan \frac{1}{2} x^2)}.$$

Daher ist nun

$$\begin{aligned} E &= r \cos \omega + R \cos \bar{\omega} \\ &= r \left\{ \frac{20 \tan \frac{1}{2} x^2 - 12}{12 (1 - \tan \frac{1}{2} x^2)} + \frac{4 \tan \frac{1}{2} x^2}{3 (1 - \tan \frac{1}{2} x^2)} \right\}, \end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$E = r \frac{3 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x^2 - 1}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} x^2} = r \left\{ \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} x^2}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} x^2} - 1 \right\},$$

d. i.

$$E = r (\operatorname{tang} x \operatorname{tang} \frac{1}{2} x - 1),$$

welche bemerkenswerthe Formel man nach dem Obigen auch auf folgende Art schreiben kann:

$$E = \frac{3}{2} R \cos \bar{\omega} - r.$$

Nach Delambre (Astronomie théorique et pratique. T. II. p. 516.) ist für die Venus:

$$R = 1 \quad \text{und} \quad r = 0,7233153$$

veraus man mittelst der obigen Formeln findet:

$$x = 67^{\circ}.20'.3''$$

$$\bar{\omega} = 39^{\circ}.43'.26''$$

$$\omega = 117^{\circ}.55'.22''$$

$$\theta = 22^{\circ}.21'.12''$$

$$E = 0,4304$$

$$G = 1,435.$$

Der an der Erde liegende Winkel  $\bar{\omega}$  heisst die Elongation der Venus von der Sonne, welche also ungefähr  $40^{\circ}$  betragen muss, wenn der Glanz der Venus ein Maximum sein soll, vorausgesetzt nämlich, dass wirklich ein Maximum Statt findet, was wir nun noch untersuchen wollen.

Zu dem Ende müssen wir den zweiten Differentialquotienten  $\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}$  entwickeln. Nach dem Obigen war aber

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{R \sin \omega \cos \bar{\omega}}{2E^3} - \frac{2R \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta}{E^4}$$

oder

Theil XX.

$$2 \frac{E^4}{R} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} = E \sin \omega \cos \bar{\omega} - 4r \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin \theta,$$

oder weil nach dem Obigen

$$\sin \theta = \frac{E \sin \bar{\omega}}{r}$$

ist:

$$2 \frac{E^3}{R} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} = \sin \omega \cos \bar{\omega} - 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \sin \bar{\omega}.$$

Hieraus erhalten wir durch fernere Differentiation nach  $\theta$ :

$$\begin{aligned} & 2 \frac{E^3}{R} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + 6 \frac{E^2}{R} \cdot \frac{\partial E}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= (\cos \omega \cos \bar{\omega} + 2 \sin \omega \sin \bar{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ &\quad - (\sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega}) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Es ist aber  $\theta + \omega + \bar{\omega} = \pi$ , also

$$1 + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} = -1 - \frac{\partial \omega}{\partial \theta},$$

und folglich

$$\begin{aligned} & 2 \frac{E^3}{R} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + 6 \frac{E^2}{R} \cdot \frac{\partial E}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ &= \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} \\ &\quad + (\cos \omega \cos \bar{\omega} + 3 \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Weil nun für  $\tan \frac{1}{2} \omega = 2 \tan \bar{\omega}$ , d. h. bei der Venus für die oben angegebenen Werthe von  $\omega$  und  $\bar{\omega}$ , der Differentialquotient  $\frac{\partial G}{\partial \theta}$  verschwindet, so können wir für diese Werthe von  $\omega$  und  $\bar{\omega}$

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{E^3}{R} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \\
&= \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} \\
&\quad + (\cos \omega \cos \bar{\omega} + 3 \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

setzen, und werden nun zu beurtheilen haben, ob die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens positiv oder negativ ist, weil dann auch respective  $\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}$  positiv oder negativ sein wird.

Zu dem Ende drücken wir zuerst die obige Gleichung auf folgende Art aus:

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{E^3}{R} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \\
&= \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} \\
&\quad + \{ \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} + \sin \omega \sin \bar{\omega} + \cos(\omega - \bar{\omega}) \} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\omega - \bar{\omega} = 78^\circ.11'.56''$$

ist, so sind, mit Berücksichtigung der obigen Werthe von  $\omega$  und  $\bar{\omega}$ , die Grössen

$$\sin \omega \sin \bar{\omega}, \quad 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega}, \quad \cos(\omega - \bar{\omega})$$

offenbar sämmtlich positiv, und es ist augenscheinlich

$$\begin{aligned}
& \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} + \sin \omega \sin \bar{\omega} + \cos(\omega - \bar{\omega}) \\
& > \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega}.
\end{aligned}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = - \frac{R \cos \bar{\omega}}{E} = - \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sin \theta},$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -1,787$$

d. h. negativ und dem absoluten Werthe nach grösser als die Einheit ist, so ist nach dem Obigen

$$-\{ \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} + \sin \omega \sin \bar{\omega} + \cos(\omega - \bar{\omega}) \} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\ > \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega},$$

folglich

$$\left. \begin{aligned} & \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} \\ & + \{ \sin \omega \sin \bar{\omega} + 4 \cos \frac{1}{2} \omega^2 \cos \bar{\omega} + \sin \omega \sin \bar{\omega} + \cos(\omega - \bar{\omega}) \} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} < 0,$$

also  $\frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2}$  negativ, welches die Bedingung des Maximums ist.

---

## XVII.

### Ueber den Inhalt der Fässer.

Von  
dem Herausgeber.

---

Der Bestimmung des Inhalts der Fässer haben mehrere grosse Mathematiker ihre Aufmerksamkeit gewidmet. Schon Kepler hat neben seinen unsterblichen astronomischen Arbeiten eine *Stereometria doliorum* geschrieben, und nach ihm haben vorzüglich Lambert, Kästner, Oberreit und Andere sich um diesen Gegenstand verdient gemacht. Kästner möchte es freilich fast tadeln, dass die Mathematiker sich zu der Beschäftigung mit solchen ganz praktischen Dingen herablassen, und spricht sich darüber in seiner bekannten scherzhaften Weise auf folgende Art aus \*):

„Ich dünke man könnte von den Leuten, die mit mathematischen Ausübungen Geld erwerben wollen, immer fordern, dass sie ihren Kopf zu etwas Theorie anstrengten. Haben sie dazu Kopf, Fleiss nicht, so dürfen sie nur solche Geschäfte Leuten überlassen, die sich dazu geschickt machen. Warum sollen die Mathematikverständigen Arbeit und Nachdenken anwenden, dem sogenannten Praktiker Vorschriften zu geben, die dieser nun ohne Arbeit und Nachdenken brauchen mag? Nicht einmal Dank wird

---

\*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg. Jahrgang 1787. S. 6. 7.

mit dieser Gutherzigkeit erworben. Denn eben, weil sich die Mathematiker häufig so herabgelassen haben, wird vergessen, dass Mathematik, oft tiefe, zur Erfindung und bequemen Einklärung dieser Regeln nöthig war, und nun hält jeder, vom Carnalisten bis zum Weinvisirer herunter, Mathematik für unnütze Grillenfängerei.“

„So einfältig sind die Rechtsgelehrten nicht gewesen, wenn sie zur gesetzmässigen Sicherheit der menschlichen Gesellschaft gehört, so populär vorzutragen, dass Bürger und Bauer es ohne weitere Nachfrage brauchen könnten. Lieber haben sie Vorsichtigkeiten, die schon die natürliche Vernunft lehrt, in feierlichen Formeln verhüllt, damit selbst die künftigen Notarien, noch vielmehr was höher hinauf steigen will, die Pandecten hören müssen.“

„Die gewöhnliche Beschuldigung, dass die mathematischen Theorien in der Ausübung nicht brauchbar sein sollen, rührt eben daher, dass man zu Ausübungen, die oft für das gemeine Wesen wichtig sind, Leute gut genug hält, denen man keine Theorie anmuthen darf, die also weder bekannte Theorie gekannt anzubringen wissen, noch viel weniger sich einfallen lassen, praktische Fragen, z. E. hier: von Gestalt und Ausmessung der Fässer, mit neuen Anwendungen der Theorie zu untersuchen.“

„Dass Mathematikverständige, wenigstens seit Keplers Zeiten, gerade bei diesem Gegenstande, Gebrauch tieferer Theorien häufig gezeigt haben, ist jedem bekannt, der etwas von der literarischen Geschichte der Visirkunst weiss.“

„Aber eben so bekannt ist, wie unmathematisch in der Ausübung eines Geschäftes ist verfahren worden, das in Handel und Wandel so viel Einfluss hat, und bei dessen unrichtiger Verwertung jeder leidet, der nicht bloss Wassertrinker ist.“

Ich meine, dass jede Gelegenheit, welche sich dem Mathematiker zur Anwendung seiner Wissenschaft darbietet, ihm sehr deshalb erwünscht und angenehm sein muss, weil sich dabei Schwierigkeiten zeigen, deren Ueberwindung die Wissenschaft selbst weiter führt, auch abgesehen von dem grossen Nutzen, welchen dergleichen Anwendungen oft dem Gemeinwesen zu bringen geeignet sind.

Unter den vielen Regeln, welche, oft mittelst sehr schönen sinniger analytischer Methoden gefunden, zur Berechnung des Inhalts der Fässer gegeben worden sind, hat sich jetzt nur noch die folgende von Lambert angegebene Methode zur Inhaltsbestimmung der Fässer erhalten:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu  $\frac{2}{3}$  des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat,  $\frac{1}{3}$  des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum



Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt.

Diese Regel wird allgemein für die genaueste gehalten, und besitzt auch den grossen Vorzug der Leichtigkeit bei der praktischen Anwendung. Die Vorlesungen, welche ich in jedem Wintersemester an der Königlichen staats- und landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena über praktische Stereometrie zu halten habe, bieten mir vielfache Gelegenheit zur praktischen Anwendung der obigen Regel dar, weil der Zweck dieser in jeder Rücksicht ausgezeichneten Lehranstalt erfordert, dass, ohne einer gesunden, möglichst einfachen und leichtverständlichen Theorie im Geringsten ihr Recht zu vergeben, der theoretischen Betrachtung doch überall die vielfachste praktische Anwendung und Ausführung auf dem Fusse folge, damit die Einführung der Theorie in das Leben nie aus dem Auge verloren werde, eine wahrhaft theoretisch-praktische Richtung, welche hauptsächlich der jetzige Director der genannten für das gegenwärtige Zeitbedürfniss so hochwichtigen Lehranstalt dem ganzen Unterrichte an derselben in höchst anerkennungswerther Weise mit dem sichtbarsten Erfolge zu geben bestrebt gewesen ist, und diese Richtung immer noch bis zu ihrem Höhepunkte zu führen sich eifrigst bemühet. Eine solche Richtung erfordert freilich in allen Unterrichtsgegenständen auch Lehrer, die, selbst auf der Höhe der Wissenschaft stehend, gerade dadurch erst vollkommen befähigt werden, sich den Bedürfnissen ihrer, bei nicht selten sehr ausgezeichneten geistiger Befähigung, doch zuweilen mit verhältnissmässig geringeren materiellen Vorkenntnissen ausgerüsteten Zuhörer vollkommen anzubequemen, und die Wissenschaft für das Leben in jeder Weise fruchtbar zu machen. Die Lambert'sche Fassregel, um dieses Beispiels mich zu bedienen, ist ein Product höherer mathematischer Untersuchungen und Rechnungen, und erfordert zu ihrer Entwicklung manche analytische Kunstgriffe, die selbst ihr zu den berühmtesten Mathematikern des vorigen Jahrhunderts gehörender Erfinder nicht in ganz zweckmässiger Weise in Anwendung zu bringen verstand. Ein Lehrer der praktischen Stereometrie an einer landwirthschaftlichen Akademie wird nun freilich nicht so unverständlich sein, seine Zuhörer mit einer Menge von Differential- und Integralformeln zu quälen; nur sollte er selbst sich nicht einfallen lassen, das Katheder zu betreten, wenn er seinen Gegenstand nicht bis zu dessen kleinsten und feinsten Nuancen kennt, denn nur, wenn dies der Fall ist, wird er befähigt sein, denselben seinen Zuhörern zu möglichster Anschauung zu bringen, verschiedene dazu erforderliche Kunstgriffe sich selbst zu erfinden, und, weil er die Vorzüge und Mängel seiner Vorschriften bis in's kleinste Detail vollkommen kennt, dieselben in wahrhaft fruchtbringender Weise anzuwenden, und die Anwendung in eben solcher Weise seinen Zuhörern vor die Augen zu führen. Nur ein solcher Unterricht kann auch geistig befähigte Zuhörer auf die Dauer befriedigen, und denselben für ihre künftige Bestimmung wahrhaft Nutzen bringend sein.

Bei meinen Vorlesungen über praktische Stereometrie an der Königlichen staats- und landwirthschaftlichen Akademie zu Eldena

machte ich die Bemerkung, dass die Lambert'sche Regel Fassinhalt fast durchgängig etwas zu gross gab, und ich meine Zuhörer, welche unter meinen Augen die Nachmess des Fasses auf nassem Wege, um das Ergebniss der theoreti- schen Inhaltsbestimmung zu controliren, bewerkstelligten, öfters diesen Umstand aufmerksam machen. Bei weiterem Nachsuchen fand ich dieselbe Erscheinung auch meistens bei den von Lambert selbst und namentlich bei den von Oberreit angestellten Versuchen ohne dass diese Mathematiker darauf besondern Werth gelegt haben scheinen. Dadurch entstand bei mir die Vermuthung, dass dieser Umstand in der Lambert'schen Formel selbst, die in mehreren Beziehungen eine blosser Näherungsformel ist, begründet sein möge. Und da nun Lambert, ganz gegen die sonst gewöhnliche Gewohnheit dieses grossen Mathematikers, eine vollständige Entwicklung und theoretische Begründung seiner Formel eigentlich nirgends gegeben hat; da das, was er in den beiden Abhandlungen, die er über die Visirkunst veröffentlicht hat\*), darüber so streng genommen nur auf einer Art von Tatonnement beruht, da ferner, wie schon Kästner und Hindenburg, so wie auch J. T. Mayer bemerkt haben\*\*), seine analytischen Rechnungen und Entwicklungen nicht ganz von Fehlern frei sind; da endlich überhaupt noch keine völlig strenge und mit möglicher Eleganz durchgeführte Entwicklung der Lambert'schen Fassung bekannt ist\*\*\*): so entschloss ich mich, selbst eine Entwicklung dieser höchst wichtigen Regel zu versuchen, um möglichst weise dadurch zugleich den oben erwähnten Umstand, dass die Regel den Inhalt öfters zu gross giebt, aufzuklären. Die Resultate dieser Untersuchung will ich nun im Folgenden mittheilen.

Da die Fassdauben nach keinem auf einen strengen mathematischen Ausdruck zu bringenden Gesetze gekrümmt sind, bleibt nichts weiter übrig, als dafür eine bestimmte mathematische Curve anzunehmen, und dann durch Versuche zu ermitteln in wie weit die gemachte Annahme sich der Wirklichkeit anschliesst. Auch sind in der That sehr verschiedene Curven zu diesem Zweck in Vorschlag gebracht worden. Ueber diese verschiedenen Vorschläge uns weiter zu verbreiten, ist jetzt nicht unsere Absicht.

\*) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert. Thl. I. Berlin. 1765. S. 12. Thl. III. Berlin. 1772. S. 12.

\*\*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik. Jahrgang 1787. S. 13. 14.

\*\*\*) Insofern man sich nicht mit bloss elementaren Hülfsmitteln begnügen will, wie ich in meinem Lehrbuch der Mathematik und Physik für Kameralisten. Thl. II. Abth. I. Leipzig. 1801. S. 323. zu thun genöthigt war, wovon aber bei einer solchen ganz gemeinen, zugleich kritischen, Untersuchung, wie ich hier zu Grunde beabsichtige, natürlich nicht die Rede sein kann.

da wir es hier vorzugsweise mit der Lambert'schen Fassregel, die auch eigentlich nur allein in der Praxis Beifall gefunden hat, zu thun haben. Lambert aber lässt das Fass auf folgende Art entstehen.

In Taf. III. Fig. 8. sei  $M$  der Mittelpunkt der Linie  $AB$ , auf welcher in  $A$ ,  $B$ ,  $M$  die Linien  $AC$ ,  $BD$ ,  $ME$  senkrecht stehen. Ist nun  $CED$  ein zwischen den Linien  $AC$  und  $BD$  liegender Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der in der Verlängerung der Linie  $ME$  über den Punkt  $M$  hinaus liegende Punkt  $O$  ist, und dreht sich die Figur  $ABCD$  um die Linie  $AB$  wie um eine feste Axe herum, so heisst der dadurch entstandene Körper ein Fass, dessen Inhalt zu bestimmen, wir jetzt versuchen wollen.

Zu dem Ende bezeichnen wir die Höhe  $AB$  des Fasses durch  $2a$ , den halben Spund-Durchmesser  $ME$  durch  $b$ , und den halben Boden-Durchmesser  $AC$  oder  $BD$  durch  $c$ , wo bekanntlich immer  $b$  grösser als  $c$  ist; den gesuchten körperlichen Inhalt des Fasses aber wollen wir durch  $F$  bezeichnen. Nehmen wir nun  $M$  als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der  $xy$  an, dessen  $x$ -Axe die Linie  $AB$  ist, und bezeichnen die Linie  $MO$  durch  $q$ , so ist  $b+q$  der Halbmesser des Kreisbogens  $CD$ , und die Gleichung dieses Kreisbogens in Bezug auf das angenommene Coordinatensystem ist folglich offenbar:

$$1) \quad x^2 + (y+q)^2 = (b+q)^2.$$

Also ist, weil unser Kreisbogen durch die Punkte  $C$  und  $D$  geht:

$$2) \quad a^2 + (c+q)^2 = (b+q)^2,$$

woraus sich mittelst leichter Rechnung

$$3) \quad q = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2(b-c)},$$

folglich, wie man leicht findet:

$$4) \quad b+q = \frac{a^2 + (b-c)^2}{2(b-c)}$$

ergiebt. Aus der Gleichung 1) folgt

$$y+q = \sqrt{(b+q)^2 - x^2},$$

also

$$y = \sqrt{(b+q)^2 - x^2} - q,$$

woraus man ferner sogleich

$$y^2 = (b+q)^2 + q^2 - x^2 - 2q\sqrt{(b+q)^2 - x^2}$$

erhält; und weil nun nach den Lehren der Integralrechnung bekanntlich

$$F = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx$$

ist, so ist

$$5) \quad F = \{(b+q)^2 + q^2\} \int_{-a}^{+a} dx - \int_{-a}^{+a} x^2 dx - 2q \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{(b+q)^2 - x^2}.$$

Es ist aber ferner nach den Lehren der Integralrechnung:

$$\int_{-a}^{+a} dx = 2a, \quad \int_{-a}^{+a} x^2 dx = \frac{2}{3}a^3$$

und allgemein

$$\int dx \sqrt{(b+q)^2 - x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{(b+q)^2 - x^2} + \frac{1}{2} (b+q)^2 \operatorname{Arc} \sin \frac{x}{b+q},$$

also, indem man die Arcus absolut nicht grösser als  $\frac{1}{2}\pi$  nimmt:

$$\int_{-a}^{+a} dx \sqrt{(b+q)^2 - x^2} = a \sqrt{(b+q)^2 - a^2} + \frac{1}{2} (b+q)^2 \left\{ \operatorname{Arc} \sin \frac{+a}{b+q} - \operatorname{Arc} \sin \frac{-a}{b+q} \right\},$$

oder kürzer:

$$\int_{-a}^{+a} dx \sqrt{(b+q)^2 - x^2} = a \sqrt{(b+q)^2 - a^2} + (b+q)^2 \operatorname{Arc} \sin \frac{a}{b+q}.$$

Daher ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$6) \quad F =$$

$$2a\pi \left\{ (b+q)^2 + q^2 - \frac{1}{3}a^2 - q\sqrt{(b+q)^2 - a^2} - \frac{q(b+q)^2}{a} \operatorname{Arcsin} \frac{a}{b+q} \right\}.$$

Nach 4) ist aber, wie man leicht findet:

$$(b+q)^2 - a^2 = \frac{\{a^2 - (b-c)^2\}^2}{4(b-c)^2},$$

also, weil bei allen Fässern  $b-c$  eine gegen  $a$  sehr kleine Grösse, folglich  $a^2 - (b-c)^2$  stets positiv ist:

$$\sqrt{(b+q)^2 - a^2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2(b-c)},$$

also, wie sich leicht mittelst 3) ergibt:

$$q - \sqrt{(b+q)^2 - a^2} = -c.$$

Daher ist nach 6):

$$7) \quad F = 2a\pi \left\{ (b+q)^2 - cq - \frac{1}{3}a^2 - \frac{q(b+q)^2}{a} \operatorname{Arcsin} \frac{a}{b+q} \right\},$$

oder auch:

$$8) \quad F = 2a\pi \left\{ (b+q)^2 - cq - \frac{1}{3}a^2 - q(b+q) \frac{\operatorname{Arcsin} \frac{a}{b+q}}{\frac{a}{b+q}} \right\}.$$

Es würde keine Schwierigkeit haben, diese Formeln durch Einführung der Werthe 3) und 4) von  $q$  und  $b+q$  ganz entwickelt bloss in den Grössen  $a, b, c$  auszudrücken, was aber, wie es mir scheint, für die numerische Rechnung nicht von wesentlichem Nutzen sein würde, indem man am Leichtesten  $q$  nach der unmittelbar aus 3) fließenden Formel:

$$9) \quad q = \frac{a^2 - (b-c)(b+c)}{2(b-c)} = \frac{a^2}{2(b-c)} - \frac{1}{2}(b+c),$$

und dann  $F$  unmittelbar nach einer der beiden obigen Formeln 7) oder 8) berechnen dürfte. Noch eine andere Formel werden wir indess weiter unten erhalten.

Für den Gebrauch im gemeinen Leben sind aber alle diese Formeln viel zu weitläufig, und man muss zu diesem Zwecke ein-

fachere Näherungsformeln suchen, die jedoch eine hinreichende Genauigkeit darbieten. Die Möglichkeit der Entwicklung solcher Näherungsformeln wird durch den Umstand dargeboten, dass bei allen im gemeinen Leben vorkommenden Fässern der Bruch  $\frac{b-c}{a}$  immer eine sehr kleine Grösse ist. Wir wollen daher auf diesen Bruch jetzt besonders unser Augenmerk richten, und zu dem Ende

$$10) \quad \frac{b-c}{a} = u, \quad b-c = au$$

setzen. Dann ist, wie man leicht mittelst des Obigen findet:

$$11) \quad q = \frac{a-(b+c)u}{2u}, \quad b+q = a \frac{1+u^2}{2u};$$

also

$$12) \quad \frac{a}{b+q} = \frac{2u}{1+u^2};$$

und setzen wir nun der Kürze wegen noch

$$13) \quad v = \frac{a}{b+q} = \frac{2u}{1+u^2};$$

so ist nach 8):

$$14) \quad F = 2a\pi \left\{ (b+q)^2 - cq - \frac{1}{3}a^2 - q(b+q) \frac{\text{Arcsin} v}{v} \right\},$$

oder, wenn wir

$$15) \quad \frac{\text{Arcsin} v}{v} = 1 + w$$

setzen:

$$16) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3}a^2 + (b-c)q - q(b+q)w \right\},$$

oder

$$17) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3}a^2 + aqu - q(b+q)w \right\},$$

oder nach 11):

$$18) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u - q(b+q)w \right\},$$

oder auch

$$19) \quad F = 2a\pi \left\{ \begin{array}{l} b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u \\ - a \frac{(a - (b+c)u)(1+u^2)}{4u^2} w \end{array} \right\}.$$

Nach einer sehr bekannten analytischen Reihe ist aber, weil hier

$$v = \frac{2u}{1+u^2}$$

gewiss immer kleiner als die Einheit ist:

$$\text{Arcsin} v = v + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{v^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{v^7}{7} + \dots,$$

also

$$\frac{\text{Arcsin} v}{v} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{v^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{v^6}{7} + \dots,$$

und folglich

$$w = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{v^4}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{v^6}{7} + \dots$$

Daher ist nach 19):

$$20) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{2}a(b+c)u - \frac{1}{4}a(a - (b+c)u)(1+u^2) \left( \frac{v}{u} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} v^2 \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} v^4 \\ + \dots \end{array} \right\} \right\}.$$

Lässt man bei unverändertem  $a$  den Bodenhalmmesser  $c$  sich dem Halbmesser  $b$  am Spund nähern, so nähert

$$21) \quad F =$$

$$2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} a(b+c)u - \frac{2}{15} a^2 u^2 + \frac{2}{15} a(b+c)u^3 + \frac{2}{105} a^2 u^4 \right\}.$$

Aus dieser Formel ergeben sich nun die folgenden Näherungsformeln.

Bleibt man bei dem ersten Gliede stehen, so erhält man:

$$22) \quad F = 2ab^2\pi.$$

Geht man bis zu der ersten Potenz von  $u$ , so ergibt sich:

$$F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} a(b+c)u \right\}.$$

Nun ist aber bekanntlich

$$au = b - c;$$

also wird vorstehende Formel:

$$F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} (b+c)(b-c) \right\},$$

oder

$$F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} (b^2 - c^2) \right\},$$

oder

$$23) \quad F = 2a\pi \left( \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 \right),$$

Drückt man diese Formel auf folgende Art aus:

$$24) \quad F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi),$$

so erhält man unmittelbar die Lambert'sche Regel zur Berechnung der Fässer, und sieht also, dass diese Regel bis auf die erste Potenz von  $u = \frac{b-c}{a}$  genau ist.

Geht man in der Formel 21) bis zu der zweiten Potenz von  $u$ , so erhält man:

$$F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} a(b+c)u - \frac{2}{15} a^2 u^2 \right\},$$



also

$$25) \quad F = 2a\pi \left\{ \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{2}{15} (b - c)^2 \right\}$$

oder

$$26) \quad F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2\pi).$$

Die in dieser Formel enthaltene Regel kann man auf folgende Art aussprechen:

Der Inhalt eines Fasses wird erhalten, wenn man zu  $\frac{2}{3}$  des Cylinders, welcher die Spundtiefe zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat,  $\frac{1}{3}$  des Cylinders, welcher den Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, addirt, und von der Summe  $\frac{2}{15}$  des Cylinders, welcher den Unterschied zwischen der Spundtiefe und dem Bodendurchmesser zum Durchmesser und die Höhe des Fasses zur Höhe hat, subtrahirt.

Vergleicht man diese Regel, welche bis auf die zweite Potenz von  $u = \frac{b-c}{a}$  genau ist, mit der Lambert'schen Regel, so sieht man, dass diese letztere allerdings den Inhalt des Fasses etwas zu gross liefert, was auch, wie schon erinnert, mit meinen und anderen Versuchen ganz übereinstimmt. Ich glaube daher, dass es zweckmässig ist, sich statt der Lambert'schen Regel lieber der obigen Regel, die nur ein wenig mehr Rechnung erfordert und sich auch leicht im Gedächtniss behalten lässt, zu bedienen, wenigstens in den Fällen, wo es auf eine grössere Genauigkeit ankommt.

Geht man in der Formel 21) bis zu der dritten Potenz von  $u$ , so erhält man:

$$F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{1}{3} a(b+c)u - \frac{2}{15} a^2 u^2 + \frac{2}{15} a(b+c)u^3 \right\},$$

also

$$27) \quad F = 2a\pi \left\{ \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{2}{15} (b-c)^2 + \frac{2}{15} \cdot \left( \frac{b-c}{a} \right)^2 (b^2 - c^2) \right\}.$$

Vergleicht man diese Formel mit den Formeln 25) oder 26), so sieht man, dass diese letzteren, oder die oben aus denselben abgeleitete Regel, den Inhalt des Fasses schon etwas zu klein liefern; und berechnet man also den Fassinhalt nach der Formel

$$F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2\pi),$$

so muss man dem Resultat eigentlich noch die Correction

$$+ \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \cdot a(b^2 - c^2)\pi$$

oder

$$+ \frac{4}{15} \cdot \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \cdot a(b-c)(b+c)\pi$$

beifügen, was aber natürlich die Rechnung weitläufiger macht.

Ginge man endlich bis zu der vierten Potenz von  $u$ , so müsste man die neue Correction

$$+ \frac{4}{105} \cdot \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \cdot a(b-c)^2\pi$$

beifügen.

Vereinigt man die beiden vorhergehenden Correctionen in eine, so erhält man als dem nach der Formel

$$F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2\pi)$$

berechneten Fassinhalte beizufügende Correction:

$$+ \frac{8}{105} \cdot \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 \cdot a(b-c)(4b+3c)\pi.$$

Die Formel

$$F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2\pi),$$

welche, ohne weitere Correction, die Berechnung der Inhalte dreier Cylinder erfordert, scheint mir mit hinreichender Genauigkeit die nöthige Leichtigkeit der numerischen Rechnung zu verbinden. Sehr zur Erleichterung dieser und anderer stereometrischer Rechnungen dient eine Tafel cylindrischer Räume mit dem Durchmesser und der Höhe des Cylinders als Argument, der man keine zu grosse, aber doch hinreichende Ausdehnung zu geben hat. Aus dieser Tafel kann man die erforderlichen cylindrischen Räume

$$2ab^2\pi, \quad 2ac^2\pi, \quad 2a(b-c)^2\pi$$

entnehmen, und hat dieselben dann bloss noch nach der Reihe mit  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{15}$  zu multipliciren, hierauf die beiden ersten Producte zu addiren, das letzte von der Summe zu subtrahiren, was Alles nicht die mindeste Schwierigkeit hat.

Es ist in mehrfacher Beziehung von Interesse, noch einige andere von der kreisförmigen Krümmung unterschiedene Krümmungen der Fassdauben einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Wir wollen daher, die im Obigen eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehaltend, annehmen, in Taf. III. Fig. 9. sei  $A'B'CD$  eine halbe Ellipse, und das Fass entstehe, indem sich der Theil  $ABCD$  dieser halben Ellipse um  $AB$  herum dreht. In Bezug auf das bei der Ellipse gewöhnliche Coordinatensystem ist

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

die Gleichung dieser Ellipse; also ist

$$y^2 dx = b^2 dx - \frac{b^2}{a^2} x^2 dx,$$

folglich

$$\int y^2 dx = b^2 x - \frac{b^2}{3a^2} x^3;$$

also

$$F = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx = \pi (2b^2 a - \frac{2b^2}{3a^2} a^3).$$

Nun ist aber

$$c^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - a^2) = b^2 - \frac{b^2}{a^2} a^2,$$

also

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}.$$

Daher ist

$$F = \pi (2b^2 a - \frac{2}{3} \cdot \frac{b^2 - c^2}{a^2} a^3),$$

d. i.

$$28) \quad F = 2a\pi \left( \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 \right).$$

oder

$$29) \quad F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi),$$

welches genau die Lambert'sche Fassregel ist. Hieraus sieht man, dass diese Regel eigentlich die Fassdauben von elliptischer Krümmung voraussetzt. Man sollte nun durch Versuche und genaue Rechnung ermitteln, welche von den beiden Voraussetzungen einer kreisförmigen oder einer elliptischen Krümmung der Fassdauben sich der Wirklichkeit genauer anschliesst. Dass die Lambert'sche Regel, also, wie wir jetzt wissen, die Voraussetzung einer elliptischen Krümmung der Fassdauben, den Inhalt des Fasses meistens etwas zu gross giebt, ist uns schon bekannt.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in Taf. III. Fig. 9. die Bogen  $A'CE$  und  $B'DE$  Bogen zweier über der Axe  $A'B'$  beschriebener Parabeln seien, welche ihre Scheitel respective in  $A'$  und  $B'$  haben, und dass das Fass wieder durch Umdrehung von  $ABCD$  um  $AB$  entstehe. Ist nun überhaupt

$$y^2 = px$$

die Gleichung der Parabel  $A'CE$  und  $A'A = u$ , so ist

$$c^2 = pu, \quad b^2 = p(a + u);$$

also

$$\frac{b^2}{c^2} = 1 + \frac{a}{u}, \quad u = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}, \quad a + u = \frac{ab^2}{b^2 - c^2};$$

$$p = \frac{c^2}{u} = \frac{b^2 - c^2}{a}.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2} F = \pi \int_{\frac{ac^2}{b^2 - c^2}}^{\frac{ab^2}{b^2 - c^2}} \frac{b^2 - c^2}{a} x dx,$$

also

$$F = 2\pi \frac{b^2 - c^2}{a} \int_{\frac{ac^2}{b^2 - c^2}}^{\frac{ab^2}{b^2 - c^2}} x dx,$$

d. i.

$$F = \pi \frac{b^2 - c^2}{a} \left\{ \left( \frac{ab^2}{b^2 - c^2} \right)^2 - \left( \frac{ac^2}{b^2 - c^2} \right)^2 \right\},$$

also

$$F = a\pi \frac{b^4 - c^4}{b^2 - c^2},$$

d. i.

$$30) \quad F = a\pi(b^2 + c^2),$$

oder

$$31) \quad F = \frac{1}{2} \{ (2ab^2\pi) + (2ac^2\pi) \}.$$

Unter der gemachten Voraussetzung wäre also das Fass das arithmetische Mittel zwischen den beiden Cylindern, welche die Spundhöhe und den Bodendurchmesser zu Durchmessern und die Höhe des Fasses zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Auch diese Regel hat man wohl zur Berechnung des Inhalts der Fässer in Vorschlag gebracht; sie weicht aber namentlich bei grossen Fässern von der Wahrheit merklich ab.

Wenn in Taf. III. Fig. 9. die Linie  $CED$  ein Bogen einer Parabel ist, die ihren Scheitel in  $E$  hat und deren Axe  $EM$  ist, so ist in Bezug auf  $E$  als Anfang und  $EM$  als Axe der Abscissen die Gleichung dieser Parabel:

$$y_1^2 = px_1.$$

Nehmen wir aber  $M$  als Anfang und  $AB$  als Axe der Abscissen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der  $xy$  an, so ist offenbar

$$x_1 = b - y, \quad y_1 = x;$$

also die Gleichung der Parabel:

$$x^2 = p(b - y)$$

oder

$$y = b - \frac{x^2}{p},$$

folglich

$$y^2 = b^2 - 2\frac{b}{p}x^2 + \frac{x^4}{p^2},$$

also

$$\int y^2 dx = b^2 x - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{p} x^3 + \frac{x^5}{5p^2};$$

und da nun

$$F = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$F = 2a\pi \left( b^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{p} a^2 + \frac{a^4}{5p^2} \right).$$

Es ist aber

$$c = b - \frac{a^2}{p}, \quad \frac{1}{p} = \frac{b-c}{a^2}, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{(b-c)^2}{a^4};$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$32) \quad F = 2a\pi \left\{ b^2 - \frac{2}{3} b(b-c) + \frac{1}{5} (b-c)^2 \right\}$$

oder

$$33) \quad F = 2a\pi \left( \frac{8}{15} b^2 + \frac{4}{15} bc + \frac{1}{5} c^2 \right).$$

Diese Formel kann man auch auf folgende Art darstellen:

$$34) \quad F = 2a\pi \left\{ \left( \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 \right) - \frac{2}{15} (b-c)^2 \right\},$$

oder auch auf folgende Art:

$$35) \quad F = 2a\pi \left\{ \left( \frac{2}{3} b + \frac{1}{3} c \right)^2 + \frac{4}{45} (b-c)^2 \right\}.$$

Die Formel 34) lässt sich auch auf folgende Art schreiben:

$$36) \quad F = \frac{2}{3} (2ab^2\pi) + \frac{1}{3} (2ac^2\pi) - \frac{2}{15} (2a(b-c)^2\pi),$$

und führt also, was ich als besonders bemerkenswerth hervorhebe, wieder auf die von mir oben für das kreisförmige Fass gegebene Regel.

Aus angestellten vergleichenden Versuchen schliesst Oberreit\*): „dass eigentlich die *parabolische* Krümmung der Dauben es ist, die der Wahrheit am nächsten kommt“, wobei er ganz die vorher betrachtete Gestalt des Fasses zu Grunde legt; und da ich im Obigen gezeigt habe, dass auch die kreisförmige Krümmung der Dauben, wenn man noch die zweite Potenz der Grösse  $\frac{b-c}{a}$  berücksichtigt, ganz zu derselben Regel führt, so glaube ich allerdings, dass diese Regel überhaupt die genaueste ist, welche man bei der jetzigen Lage der Sache geben kann, wenn man zugleich von der Leichtigkeit der Rechnung nicht zu viel aufopfern will.

Interessant und wichtig scheint mir nun aber immer noch die Frage, ob die kreisförmige oder die parabolische Krümmung der Fassdauben der Wahrheit am nächsten kommt, was sich natürlich nur durch möglichst genaue Versuche ermitteln lässt. Dann muss man aber natürlich das kreisförmige Fass nicht nach einer der obigen Näherungsformeln, sondern ganz genau berechnen, weshalb ich jetzt noch die obigen ganz genauen Formeln so umgestalten will, wie sie mir die leichteste und bequemste Rechnung zu gestatten scheinen.

Man berechne den Hüllswinkel  $\omega$  mittelst der Formel

$$37) \quad \operatorname{tang} \omega = \frac{b-c}{a},$$

wo bekanntlich  $\frac{b-c}{a} = u$  ist. Dann ist

$$v = \frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\operatorname{tang} \omega}{1+\operatorname{tang}^2 \omega} = 2\sin \omega \cos \omega = \sin 2\omega.$$

Nehmen wir nun an, dass  $\omega$  in Secunden ausgedrückt sei, so ist

$$\operatorname{Arcsin} v = \operatorname{Arcsin} \sin 2\omega = 2\omega \sin 1''.$$

Daher ist nach 7) und 13):

$$F = 2a\pi \left\{ (b+q)^2 - cq - \frac{1}{3}a^2 - \frac{2q(b+q)^2}{a} \omega \sin 1'' \right\},$$

oder

---

\*) Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, Jahrgang 1786. S. 454.

$$38) \quad F = 2a^3\pi \left\{ \left( \frac{b+q}{a} \right)^2 (1 - 2\frac{q}{a} \omega \sin l'') - \frac{c}{a} \cdot \frac{q}{a} - \frac{1}{3} \right\}.$$

Weil

$$\frac{b+q}{a} = \frac{1}{v} = \operatorname{cosec} 2\omega$$

ist, so kann man die Gleichung 38) auch auf folgende Art schreiben:

$$39) \quad F = 2a^3\pi \left\{ (1 - 2\frac{q}{a} \omega \sin l'') \operatorname{cosec}^2 2\omega - \frac{c}{a} \cdot \frac{q}{a} - \frac{1}{3} \right\},$$

wo man  $q$  am Leichtesten mittelst der aus dem Obigen sogleich sich ergebenden Formel

$$40) \quad q = a \operatorname{cosec} 2\omega - b$$

berechnet. Mittelst der vorhergehenden Formeln wird man immer den Inhalt des kreisförmigen Fasses ganz genau berechnen können, wenn man es mit dem parabolischen Fasse vergleichen will.



# XVIII.

## Begründung eines Lehrsatzes zur Bestimmung höherer Integrale zusammengesetzter Functionen.

Von

Herrn Hofrath L. Oettinger  
zu Freiburg i. B.

### §. 1.

Sind  $X$  und  $Z$  zwei unter sich verschiedene Functionen von  $x$ , so gilt für die Darstellung höherer Differenziale zusammengesetzter Functionen von  $x$  die bekannte Gleichung

$$1) \quad \frac{\partial^r XZ}{(\partial x)^r} = \frac{X \partial^r Z}{(\partial x)^r} + (r)_1 \frac{\partial X \partial^{r-1} Z}{(\partial x)^r} + (r)_2 \frac{\partial^2 X \partial^{r-2} Z}{(\partial x)^r} + \dots \\ + (r)_p \frac{\partial^p X \partial^{r-p} Z}{(\partial x)^r} + \dots (r)_r \frac{\partial^r X \cdot Z}{(\partial x)^r},$$

wenn hierin die Binomialcoefficienten durch

$$(r)_p = \frac{r(r-1)(r-2) \dots (r-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}$$

bezeichnet werden\*).

---

\*) Häufig werden die Binomialcoefficienten durch die Symbole  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$  bezeichnet. Ich halte diese Bezeichnung weder für consequent noch für systematisch richtig, denn  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p \dots$  deuten bekanntlich unter sich verschiedene Monome oder Elemente an. Verschie-

Dass diese Gleichung auch unmittelbar für die Darstellung der Integrale zusammengesetzter Functionen gelte, ist, soviel mir bekannt, bisher weder behauptet noch bewiesen worden. Es dürfte daher für den innern Zusammenhang der Differenzial- und Integral-Rechnung nicht unwichtig sein, wenn dieser Beweis gegeben wird.

Für die Differenzen- und Summenrechnung gilt der unmittelbare Uebergang von den Gleichungen für positive Unterschiede einfacher und zusammengesetzter Functionen auf die Gleichungen mit negativen Unterschieden (Summenrechnung oder Integralcalcul mit endlichen Differenzen). Diess habe ich in Crelle's Journal 11.—16. Band (Lehre von den aufsteigenden Functionen) und 33. Band S. 117 und ff. (in der Fakultäten-Theorie) und in diesem Archiv 13. Bd. S. 36 und ff. nachzuweisen versucht.

Wenn nun in der Differenzen- und Summenrechnung, welche die Grundlage der Differenzial- und Integralrechnung bildet, diese Gesetze nachgewiesen werden können und auch nachgewiesen wurden, so leitet schon die Analogie darauf hin, dass auch der Beweis auf die Differenzial- und Integralrechnung sich ausdehnen lassen werde.

Für die Differenziale und Integrale der meisten einfachen Functionen habe ich diese Nachweisung in einer Abhandlung „Ueber Differenziale und Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten“ (Crelle's Journ. 44. Bd. 1. und 2. Heft) gegeben. Dass nun die oben unter Nr. 1) für höhere Differenziale zusammengesetzter Functionen aufgestellte Gleichung auch unmittelbar für höhere Integrale zusammengesetzter Functionen gelte, soll hier nachgewiesen werden.

Unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{\hat{c}^{-r} f x}{(\hat{c} x)^{-r}} = \int^r f x (\hat{c} x)^r$$

ist, stellt sich die Gleichung 1), wenn  $-r$  statt  $+r$  gesetzt wird, so dar:

$$\begin{aligned} 2) \quad \int^r X Z (\hat{c} x)^r &= X \int^r Z (\hat{c} x)^r - [r]_1 \hat{c} X \int^{r+1} Z (\hat{c} x)^r \\ &+ [r]_2 \hat{c}^2 X \int^{r+2} Z (\hat{c} x)^r - [r]_3 \hat{c}^3 X \int^{r+3} Z (\hat{c} x)^r \\ &+ \dots (-)^r [r]_r \hat{c}^r X \int^{r+p} Z (\hat{c} x)^r - \dots \end{aligned}$$

dene Begriffe aber können ohne Gefahr der Verwechslung nicht wohl auf gleiche Art bezeichnet werden; daher scheint die oben angenommene Bezeichnungsweise die bessere zu sein.

win

$$[r]_p = \frac{r(r+1)(r+2) \dots (r+p-1)}{1.2.3 \dots p} = \frac{r^{p+1}}{p!}$$

ndeutet.

Diese Gleichung trägt die Integration einer zusammengesetzten Function auf die Integrale der einen und die Differenziale der andern Function (beide für sich betrachtet) über.

Um nun den fraglichen Beweis zu führen, gehen wir von folgender bekannten Gleichung aus:

$$3) \quad \int XZ\partial x = X \int Z\partial x - \int (\partial X \int Z\partial x).$$

erin liegt folgendes Gesetz:

4) Um das Integral einer zusammengesetzten Function zu erhalten, vervielfache man die erste ungeänderte Function mit dem Integrale der zweiten, ferner nehme man das Differenzial der ersten Function, verbinde es mit dem Integrale der zweiten und nehme nun von der so erhaltenen zusammengesetzten Function als Ganzes das Integral und ziehe letzteres ab.

Wendet man nun das so eben aufgestellte Gesetz auf das rechte Glied in 3) selbst wieder an, so erhält man

$$-\int (\partial X \int Z\partial x) = -\partial X \int^2 Z\partial x + \int (\partial^2 X \int^2 Z\partial x).$$

Wird nun das zweite Glied dieser Darstellung selbst wieder nach demselben Gesetz behandelt, so entsteht

$$\int (\partial^2 X \int^2 Z\partial x) = \partial^2 X \int^3 Z\partial x - \int (\partial^3 X \int^3 Z\partial x).$$

Ebenso wird auf gleiche Weise

$$-\int (\partial^3 X \int^3 Z\partial x) = -\partial^3 X \int^4 Z\partial x + \int (\partial^4 X \int^4 Z\partial x)$$

s. w. Mit jeder Darstellung wird ein neues Glied gewonnen, dessen Differenzial und Integral getrennt sind. Bei Fortsetzung dieser Entwicklungsweise erhält man

$$\begin{aligned} \int XZ\partial x = & X \int Z\partial x - \partial X \int^2 Z\partial x + \partial^2 X \int^3 Z\partial x \\ & - \partial^3 X \int^4 Z\partial x + \dots \dots (-)^p \partial^p X \int^p Z\partial x \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe bricht ab, wenn die höheren Differenziale einer Function auf 0 führen. Ist diess nicht der Fall, so läuft sie ins Unendliche.

Die Glieder dieser Reihe enthalten vom 2ten an scheinbar etwas Undarstellbares, denn

$$\int^p Z \partial x$$

kann für sich nicht dargestellt werden, wenn  $p > 1$  ist. Der Exponent des Integralzeichens und der von  $\partial x$  müssen nämlich gleich gross sein, wenn das Integral darstellbar sein soll. Diese Bedingung ist aber auch bei allen Gliedern vorhanden, denn das beigefügte Differenzial ergänzt die erforderliche Potenz von  $\partial x$ . Die Glieder dieser Reihe unterliegen nämlich folgendem allgemeinen Gesetze:

$$\partial^p X \int^{p+1} Z \partial x.$$

Wird nun das  $p^{te}$  Differenzial von  $X$  durch  $X_p(\partial x)^p$  bezeichnet, so hat man den darstellbaren Ausdruck

$$\partial^p X \int^{p+1} Z \partial x = X_p \int^{p+1} Z (\partial x)^{p+1}.$$

Die in 5) erhaltene Darstellung fällt mit 2) zusammen, wenn  $r=1$  gesetzt wird.

Um nun das zweite Integral zu erhalten, hat man Nr. 5) mit  $\int \partial x$  zu verbinden. Hiedurch entsteht

$$\begin{aligned} \int^2 X Z (\partial x)^2 = & \int (X \int Z \partial x) \partial x - \int (\partial X \int^2 Z \partial x) \partial x \\ & + \int (\partial^2 X \int^3 Z \partial x) \partial x - \dots \end{aligned}$$

Wird nun jeder Ausdruck auf der rechten Seite nach dem Gesetze 5) selbst wieder behandelt, so ergibt sich für jedes Glied eine Reihe. Werden nun ferner die hieraus fliessenden Reihen gehörig geordnet, so entsteht:

$$\begin{aligned}
& \int^2 XZ(\partial x)^2 \\
= & X \int^2 Z(\partial x)^2 - \partial X \int^3 Z(\partial x)^2 + \partial^2 X \int^4 Z(\partial x)^2 - \partial^3 X \int^5 Z(\partial x)^2 + \dots \\
& - \partial X \int^3 Z(\partial x)^2 + \partial^2 X \int^4 Z(\partial x)^2 - \partial^3 X \int^5 Z(\partial x)^2 + \dots \\
& + \partial^2 X \int^4 Z(\partial x)^2 - \partial^3 X \int^5 Z(\partial x)^2 + \dots \\
& - \partial^3 X \int^5 Z(\partial x)^2 + \dots
\end{aligned}$$

und hieraus durch Zusammenzählen:

$$\begin{aligned}
6) \quad & \int^2 XZ(\partial x)^2 \\
= & X \int^2 Z(\partial x)^2 - 2\partial X \int^3 Z(\partial x)^2 + 3\partial^2 X \int^4 Z(\partial x)^2 - 4\partial^3 X \int^5 Z(\partial x)^2 \dots \\
& \dots (-)^p \cdot \frac{p+1}{1} \partial^p X \int^{p+2} Z(\partial x)^2 \dots
\end{aligned}$$

Diese Darstellung fällt mit 2) zusammen, wenn dort  $r=2$  gesetzt wird, denn es ist

$$[2]_p \partial^p X \int^{2+p} Z(\partial x)^2 = \frac{p+1}{1} \partial^p X \int^{p+2} Z(\partial x)^2.$$

Wird nun Nr. 6) mit  $\int \partial x$  verbunden, werden die hieraus sich ergebenden Glieder der rechten Seite selbst wieder nach 5) behandelt, und die hieraus fließenden Reihen geordnet und zusammengezählt, so erhält man

$$\begin{aligned}
& \int^3 XZ(\partial x)^3 \\
= & X \int^3 Z(\partial x)^3 - \partial X \int^4 Z(\partial x)^3 + \partial^2 X \int^5 Z(\partial x)^3 - \partial^3 X \int^6 Z(\partial x)^3 + \dots \\
& - 2\partial X \int^4 Z(\partial x)^3 + 2\partial^2 X \int^5 Z(\partial x)^3 - 2\partial^3 X \int^6 Z(\partial x)^3 + \dots \\
& + 3\partial^2 X \int^5 Z(\partial x)^3 - 3\partial^3 X \int^6 Z(\partial x)^3 + \dots \\
& - 4\partial^3 X \int^6 Z(\partial x)^3 + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= X \int^3 Z(\partial x)^3 - \frac{2.3}{1.2} \partial X \int^4 (\partial x)^3 \\
&\quad + \frac{3.4}{1.2} \partial^2 X \int^5 Z(\partial x)^3 - \frac{4.5}{1.2} \partial^3 X \int^6 Z(\partial x)^3 + \dots \\
&\quad \dots (-)^p \frac{(p+1)(p+2)}{1.2} \partial^p X \int^{p+3} Z(\partial x)^3 \dots
\end{aligned}$$

Diese Darstellung fällt mit Nr. 2) zusammen, wenn dort  $r=3$  gesetzt wird, denn es ist

$$\frac{3p+1}{1p+1} \partial^p X \int^{3+p} Z(\partial x)^3 = \frac{(p+1)(p+2)}{1.2} \partial^p X \int^{p+3} Z(\partial x)^3.$$

Führt man nun auf die angedeutete Weise den Calcul weiter, und steigt durch die höhern Integrale auf, und ist man endlich zu dem  $(r-1)$ ten Integrale gelangt, so hat dasselbe folgende Form:

$$\begin{aligned}
&\int^{r-1} XZ(\partial x)^{r-1} \\
&= X \int^{r-1} Z(\partial x)^{r-1} - [2]_{r-2} \partial X \int^r Z(\partial x)^{r-1} + [3]_{r-2} \partial^2 X \int^{r+1} Z(\partial x)^{r-1} \\
&\quad - [4]_{r-2} \partial^3 X \int^{r+2} Z(\partial x)^{r-1} \dots (-)^p [p+1]_{r-2} \partial^p X \int^{r-1+p} Z(\partial x)^{r-1} \dots
\end{aligned}$$

Werden nun die Glieder dieser Darstellung mit  $\int \partial x$  verbunden und die auf der rechten Seite nach 5) behandelt, so entsteht

$$\begin{aligned}
&\int^r XZ(\partial x)^r = X \int^r Z(\partial x)^r \\
&\quad - \partial X \int^{r+1} Z(\partial x)^r + \partial^2 X \int^{r+2} Z(\partial x)^r \\
&\quad - [2]_{r-2} \partial X \int^{r+1} Z(\partial x)^r + [2]_{r-2} \partial^2 X \int^{r+2} Z(\partial x)^r \\
&\quad \quad + [3]_{r-2} \partial^2 X \int^{r+2} Z(\partial x)^r \\
&\quad \quad - \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r + \dots \\
&\quad \quad - [2]_{r-2} \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r + \dots \\
&\quad \quad - [3]_{r-2} \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r + \dots \\
&\quad \quad - [4]_{r-2} \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r + \dots
\end{aligned}$$

und hieraus durch Zusammenzählen:

$$\begin{aligned}
 & 7) \quad \int^r X Z(\partial x)^r \\
 &= X \int^r Z(\partial x)^r - [2]_{r-1} \partial X \int^{r+1} Z(\partial x)^r + [3]_{r-1} \partial^2 X \int^{r+2} Z(\partial x)^r \\
 &\quad - [4]_{r-1} \partial^3 X \int^{r+3} Z(\partial x)^r \dots (-)^p [p+1]_{r-1} \partial^p X \int^{r+p} Z(\partial x)^r \dots
 \end{aligned}$$

Diese Darstellung fällt mit 2) zusammen, denn es ist:

$$[2]_{r-1} = \frac{2.3.4 \dots r}{1.2.3 \dots (r-1)} = \frac{r}{1},$$

$$[3]_{r-1} = \frac{3.4.5 \dots r(r+1)}{1.2.3 \dots (r-1)} = \frac{r(r+1)}{1.2} = [r]_2,$$

$$[4]_{r-1} = \frac{4.5.6 \dots r(r+1)(r+2)}{1.2.3 \dots (r-1)} = \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} = [r]_3,$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$[p+1]_{r-1} = \frac{(p+1)(p+2) \dots (p+r-1)}{1.2.3 \dots (r-1)} = \frac{r(r+1) \dots (r+p-1)}{1.2 \dots p} = [r]_p.$$

Hiernach ist der fragliche Beweis geliefert und es folgt, dass die Gleichung 1) nicht nur für ein positives, sondern auch für ein negatives  $r$  gilt, und dass man diese Gleichung nicht nur zur Darstellung höherer Differenziale, sondern auch für die höherer Integrale zusammengesetzter Functionen benutzen kann.

Hiemit ist zugleich der unmittelbare Zusammenhang zwischen den Grundgesetzen der Differenzial- und Integral-Rechnung auch für zusammengesetzte Functionen nachgewiesen.

Bezeichnet man nun die verschiedenen Functionen von  $x$  durch  $f_1x, f_2x, f_3x \dots f_mx$ , so hat man aus der Differenzial-Rechnung folgende Gesetze:

$$\begin{aligned}
 8) \quad & \partial^r f_1 x f_2 x = (\partial_1 + \partial_2)^r f_1 x f_2 x, \\
 & \partial^r f_1 x f_2 x f_3 x = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)^r f_1 x f_2 x f_3 x, \\
 & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \partial^r f_1 x f_2 x \dots f_m x = (\partial_1 + \partial_2 + \dots \partial_m)^r f_1 x f_2 x \dots f_m x;
 \end{aligned}$$

und es ist durch das Gesagte gezeigt, dass diese Darstellungen für ein positives und negatives  $r$ , also nicht nur für höhere Differenziale, sondern auch für höhere Integrale unmittelbar gelten. Kennt man daher die einen, so kennt man nach den gehörigen Reductionen auch die andern.

## §. 2.

Die im vorigen Paragraphen gegebenen Nachweisungen enthalten, wie vor Augen liegt, eine wesentliche Erweiterung in den Fundamentalsätzen der Differenzial- und Integral-Rechnung. Sie erheben die Lehren dieser Doctrinen auf einen höheren Standpunkt und eröffnen ein reiches Feld zu Anwendungen. Sie verallgemeinern die Entwicklungsmethoden dieses Zweiges der Mathematik und haben dabei den grossen Vorthail, dass sie eine unabhängige Ableitungsweise sichern.

Bisher war die Grundgleichung für die Integration zusammengesetzter Functionen nur in der beschränkten Form

$$\int XZ\partial x = X \int Z\partial x - \int (\partial X \int Z\partial x),$$

also nur für das erste Integral und nur in zurücklaufender Bildungsweise gegeben.

Diese Form ist sehr beengt, sie erzeugt durch fortgesetzte Wiederholung immer nur je ein Glied und führt bei jeder wiederholten Operation wieder auf die Integration einer zusammengesetzten Function. — Dasselbe Geschäft muss daher so lange wiederholt werden, bis durch fortgesetztes Integriren der Zweck erreicht ist, und aus einem auf mühsame Weise errungenen Resultate für jeden speciellen Fall irgend ein Gesetz erschlossen werden kann.

Diese Beschränkung wird durch die hier mitgetheilte Methode aufgehoben. Es wird ein Ueberblick gewährt, der die Geschäfte nicht nur ungemein erleichtert, sondern das Endziel auf einmal vor Augen rückt, und alle besondern Fälle unter ein allgemeines Gesetz subsumirt.

Es werden sogar zwei bisher immer getrennt und auf schwierige Weise ausgeführte Geschäfte (Differenziren und Integriren) in eines zusammen gezogen und auf einmal ausgeführt, denn man hat nach ausgeführter Differenziation nichts weiter zu thun als  $-r$  statt  $+r$  zu setzen, um alsbald das fragliche Integral zu erhalten. Mit einem Worte: die Gleichung 1) §. 1. differenzirt und integirt in einem und demselben Acte.

Hierin ist eine wesentliche Erleichterung in Ausführung der Geschäfte zu erkennen, wenn man auch von der Bedeutung dieser Sätze in wissenschaftlicher Beziehung ganz absehen will, welchen Zusammenhang zwischen der Differenzial- und Integral-Rechnung so klar und einfach vor Augen legt.

Ein Beispiel mag das Gesagte verdeutlichen. Hierzu s—  
vorerst ein ganz einfacher Fall dienen, und das  $r^{\text{te}}$  Differenz—  
und Integral der zusammengesetzten Function ia



$$x^m(ax+b)^p$$

bestimmt werden.

Setzt man  $Z = x^m$  und  $(ax+b)^p = X$ , so ist:

$$\begin{aligned} & \partial^r x^m (ax+b)^p \\ &= (ax+b)^p \partial^r x^m + r \partial (ax+b)^p \partial^{r-1} x^m + (r)_2 \partial^2 (ax+b)^p \partial^{r-2} x^m + \dots \end{aligned}$$

Nun ist

$$\partial^s X = \partial^s (ax+b)^p = p^{s| - 1} a^s (ax+b)^{p-s} (\partial x)^s,$$

$$\partial^s Z = \partial^s x^m = m^{s| - 1} x^{m-s} (\partial x)^s.$$

Durch Einführung der gehörigen Werthe entsteht:

$$\begin{aligned} 1) \quad \partial^r (ax+b)^p x^m &= (ax+b)^p m^{r| - 1} x^{m-r} (\partial x)^r \\ &+ r \cdot p \cdot a (ax+b)^{p-1} m^{r-1| - 1} x^{m-r+1} (\partial x)^r \\ &+ \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} p^{2| - 1} a^2 (ax+b)^{p-2} m^{r-2| - 1} x^{m-r+2} (\partial x)^r \\ &+ (r)_3 p^{3| - 1} a^3 (ax+b)^{p-3} m^{r-3| - 1} x^{m-r+3} (\partial x)^r \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &(r)_p p^{p| - 1} a^p \cdot m^{r-p| - 1} x^{m-r+p} (\partial x)^r. \end{aligned}$$

Setzt man hierin  $-r$  statt  $r$ , so geht das Differenzial in das Integral über und man erhält unter Berücksichtigung, dass

$$m^{-r-s| - 1} = \frac{1}{(m+r+s)^{r+s| - 1}} = \frac{1}{(m+1)^{r+s| 1}}$$

ist, unmittelbar aus 1) folgendes Integral:

$$\begin{aligned} 2) \quad \int^r (ax+b)^p x^m (\partial x)^r &= \frac{(ax+b)^p \cdot x^{m+r}}{(m+1)^{r| 1}} \\ &- \frac{r}{1} \cdot \frac{p a (ax+b)^{p-1} x^{m+r+1}}{(m+1)^{r+1| 1}} \\ &+ \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{p^{2| - 1} a^2 (ax+b)^{p-2} x^{m+r+2}}{(m+1)^{r+2| 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{p^{s-1} a^2 (ax+b)^{p-3} x^m}{(m+1)(r+3)!} \\
& \vdots \\
& + \frac{r!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots r} \cdot \frac{p^{s-1} a^r (ax+b)^{p-2r-1} x^{m+r+p}}{(m+1)(r+1)!} \\
& + \frac{C_1 x^{r-1}}{1 \cdot 2 \cdots r} + \frac{C_2 x^{r-2}}{1 \cdot 2 \cdots r} + \frac{C_3 x^{r-3}}{1 \cdot 2 \cdots r} + \dots C_{r-1} x + C_r
\end{aligned}$$

Die nämliche Darstellung erhält man auch, wenn man von dem ersten zum zweiten, von diesem zum dritten und sofort bis zum  $r$ ten allmählig aufsteigt, jedoch nach langer Arbeit.

Das vorstehende Integral hat  $r$  Constanten. Sie werden gefunden, wenn in der vorstehenden Darstellung  $x=0$  gesetzt, allmählig die Werthe 1, 2, 3, ...,  $r$  statt  $r$  eingeführt werden. Crelle's Journ. 44. Bd. p. 149 u. ff.

Das nämliche Resultat, welches die vorstehende Gleichung 2) enthält, wird gewonnen, wenn man die Integralgleichung der 7) §. 1. benutzt und die Werthe

$$x^s(ax+b)^p = p^{s-1} a^s (ax+b)^{p-s} (\partial x)^s,$$

$$\int x^m (\partial x)^s = \frac{x^{m+s}}{(m+1)s!}$$

einträgt. Differenzial und Integral unterliegen also dem gleichen Gesetze.

Eine zweite Form für die entwickelte Darstellung wird gefunden, wenn man  $X=x^a$  und  $Z=(ax+b)^p$  setzt. Es geht dann unter Benutzung der oben aufgestellten Differenzialkoefficienten:

$$\begin{aligned}
x^m(ax+b)^p &= x^m \cdot p^{r-1} a^r (ax+b)^{p-r} (\partial x)^r \\
&+ r \cdot m p^{r-2} a^{r-1} x^{m-1} (ax+b)^{p-r+1} (\partial x)^r \\
&+ r(r-1) m^2 a^{r-2} x^{m-2} (ax+b)^{p-r+2} (\partial x)^r \\
&+ r(r-1)(r-2) m^3 a^{r-3} x^{m-3} (ax+b)^{p-r+3} (\partial x)^r \\
&\vdots \\
&+ r(r-1)m m^{r-1} a^{r-m} x^{m-m} (ax+b)^{p-r+m} (\partial x)^r.
\end{aligned}$$

Wird hierin  $-r$  statt  $r$  gesetzt und bemerkt, dass

$$p^{-r-s-1} = \frac{1}{(p+r+s)^{r+s-1}} = \frac{1}{(p+1)^{r+s-1}}$$

so ergibt sich hieraus unmittelbar das nachstehende  $r^{\text{te}}$  Integral:

$$\begin{aligned} \int^r x^m (ax+b)^p (\partial x)^r = & \frac{x^m (ax+b)^{p+r}}{(p+1)^{r+1} a^r} \\ & - \frac{r \cdot m \cdot x^{m-1} (ax+b)^{p+r+1}}{(p+1)^{r+1} a^{r+1}} \\ & + [r]_2 \frac{m^2 - 1 x^{m-2} (ax+b)^{p+r+2}}{(p+1)^{r+2} a^{r+2}} \\ & - [r]_3 \frac{m^3 - 1 x^{m-3} (ax+b)^{p+r+3}}{(p+1)^{r+3} a^{r+3}} \\ & \vdots \\ & (-)^p \cdot [r]_m \cdot \frac{m^m - 1 (ax+b)^{p+m+r}}{(p+1)^{r+m} a^{r+m}} \\ & + \frac{C_1 x^{r-1}}{1^{r-1} 1} + \frac{C_2 x^{r-2}}{1^{r-2} 1} + \frac{C_3 x^{r-3}}{1^{r-3} 1} + \dots C_{r-1} x + C_r. \end{aligned}$$

Das  $r^{\text{te}}$  Differenzial liefert, wie man leicht erkennt, auch bei verschiedener Anordnung in den beiden Darstellungen 1) und 3) ein und dasselbe Resultat. Das  $r^{\text{te}}$  Integral liefert aber in 2) und 4) je nach der Form nach verschiedene Resultate.

In der ersten Darstellung entstehen  $p$  Glieder mit  $r$  Constanten, in der zweiten  $m$  Glieder mit  $r$  Constanten. Der Inhalt aber wird und muss gleich sein, da er eine und dieselbe Sache bedeutet. In der Darstellung 2) führen alle Constanten für  $x=0$  auf 0. In der Darstellung 4) ist diess nicht der Fall.

Man findet die Constanten für 4) auf die oben bezeichnete Weise, wenn  $x=0$  und dann  $r=1,2,3,\dots,r$  gesetzt wird.

Bezeichnet man das  $r^{\text{te}}$  Integral für die Grenzen von 0 bis  $x$  durch  $\int_{0,x}^r$ , so hat man

$$\begin{aligned} \int_{0,x}^r x^m (ax+b)^p (\partial x)^r = & \frac{x^m (ax+b)^p}{(p+1)^{r+1} a^r} - \frac{r \cdot m x^{m-1} (ax+b)^{p+r+1}}{(p+1)^{r+1} a^{r+1}} \\ & + [r]_2 \frac{m^2 - 1 x^{m-2} (ax+b)^{p+r+2}}{(p+1)^{r+2} a^{r+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [r]_2 \frac{m^{2|-1} x^{m-3} (ax+b)^{p+r+3}}{(p+1)^{r+3|1} a^{r+3}} \\
& \vdots \\
& (-)^m [r]_m \frac{m^{m|-1} x^0 (ax+b)^{p+r+m}}{(p+1)^{r+m|1} a^{r+m}} \\
& (-)^{m+1} \frac{1^{m|1} h^{p+m+1} x^{r-1}}{(p+1)^{m+1|1} 1^{r-1|1} a^{m+1}} (-)^{m+1} \frac{2^{m|1} h^{p+m+2} x^{r-2}}{(p+1)^{m+2|1} 1^{r-2|1} a^{m+2}} \\
& (-)^{m+1} \frac{3^{m|1} h^{p+m+3} x^{r-3}}{(p+1)^{m+3|1} 1^{r-3|1} a^{m+3}} (-)^{m+1} \frac{4^{m|1} h^{p+m+4} x^{r-4}}{(p+1)^{m+4|1} 1^{r-4|1} a^{m+4}} \\
& \dots (-)^{m+1} \frac{r^{m|1} h^{p+m+r}}{(p+1)^{m+r|1} 1 a^{m+r}}.
\end{aligned}$$

Die hier gefundenen Gleichungen gelten nicht nur für ein ganzes, sondern auch für ein gebrochenes  $r$  und sind daher grosser Anwendung fähig. Man kann sie zu dem Ende durch Auscheidung gemeinschaftlicher Faktoren unter bequemere Formen setzen. Aus 2) wird sofort:

$$\begin{aligned}
6) \quad \int_0^r (ax+b)^p x^m (\partial x)^r &= \frac{1^{m|1} x^{m+r}}{1^{m+r|1}} \left[ (ax+b)^p - r \frac{p(ax+b)^{p-1} ax}{(m+r+1)} \right. \\
&+ [r]_2 \frac{p^{2|-1} (ax+b)^{p-2} a^2 x^2}{(m+r+1)^{2|1}} - [r]_3 \frac{p^{3|-1} a^3 (ax+b)^{p-3}}{(m+r+1)^{3|1}} \\
&\dots (-)^p \frac{[r]_p p^{p|-1} a^p x^p}{(m+r+1)^{p|1}} \left. \right].
\end{aligned}$$

Aus 4) oder 5) wird dann

$$\begin{aligned}
7) \quad \int_0^r x^m (ax+b)^p (\partial x)^r &= \frac{1^{p|1} (ax+b)^{p+r}}{1^{p+r|1} a^r} \left[ x^m - \frac{r \cdot m x^{m-1} (ax+b)}{(p+r+1) \cdot a} \right. \\
&+ [r]_2 \frac{m^{2|-1} x^{m-2} (ax+b)^2}{(p+r+1)^{2|1} a^2} - [r]_3 \frac{m^{3|-1} x^{m-3} (ax+b)^3}{(p+r+1)^{3|1} a^3} \dots \\
&\dots (-)^m [r]_m \frac{m^{m|-1} (ax+b)^m}{(p+r+1)^{m|1} a^m} \left. \right] \\
&(-)^{m+1} \frac{1^{p|1} h^{p+m+1}}{1^{p+m+1|1} a^{m+1}} \left[ \frac{1^{m|1} x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{2^{m|1} h x^{r-2}}{(p+m+2) 1^{r-2|1} a} \right. \\
&+ \frac{3^{m|1} h^2 x^{r-2}}{(p+m+2)^{2|1} a^2 1^{r-3|1}} \dots + \frac{(r-1)^{m|1} h^{r-2} x}{(p+m+2)^{r-2|1} a^{r-2}} + \left. \frac{r^{m|1} h^{r-1}}{(p+m+2)^{r-1|1} a^{r-1}} \right].
\end{aligned}$$

Hierin kann  $r$  eine ganze Zahl, einen ächten oder unächtlichen Bruch bedeuten. So ist

$$\int_0^x x^m (ax+b)^p (\partial x)^{\frac{r}{q}} = \frac{1^{p|1} (ax+b)^{p+\frac{r}{q}}}{1^{\frac{r}{q}+p} \sqrt[q]{a^r}} \left[ x^m - \frac{r \cdot m x^{m-1} (ax+b)}{q(1+p+\frac{r}{q})a} \right. \\ + \frac{r(r+q)}{1 \cdot 2 \cdot q^2} \frac{m^{2|1} x^{m-2} (ax+b)^2}{(1+p+\frac{r}{q})^{2|1} a^2} - \frac{r^{3|1} q m^{3|1} x^{m-3} (ax+b)^3}{1^{3|1} q^3 (1+p+\frac{r}{q})^{3|1} a^3} + \dots \\ \dots (-)^m \frac{r(r+q)(r+2q) \dots (r+(m-1)q) m^{m|1} (ax+b)^m}{1 \cdot 2 \dots m \cdot q^m (1+p+\frac{r}{q})^{m|1} a^m} \left. \right] \\ (-)^{m+1} \frac{1^{m|1} \cdot 1^{p|1} b^{m+p+\frac{r}{q}}}{1^{p+m+\frac{r}{q}|1} a^{m+\frac{r}{q}}}.$$

Hieraus lassen sich eine Menge specieller Fälle ableiten und in Tabellen bringen, welche die hierher gehörigen Integraltafeln ergänzen und erweitern. Diess Geschäft wird aber nicht mehr nöthig, da die hier gegebenen Darstellungen alle besonderen Fälle schon entwickelt dem Auge vorlegen. So ist sofort

$$9) \int_0^x x^{\frac{1}{2}} (ax+b)^p (\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1^{p|1} (ax+b)^p \sqrt{ax+b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p|1} \sqrt{a\pi}} \left[ x - \frac{(ax+b)}{(2p+3)a} \right]$$

$$+ \frac{2 \cdot 1^{p|1} b^{p+1} \sqrt{b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p+1|1} a \sqrt{a\pi}},$$

$$\int_0^x x^2 (ax+b)^p (\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2 \cdot 1^{p|1} (ax+b)^p \sqrt{ax+b}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{p|1} \sqrt{a\pi}} \left[ x^2 - \frac{2x(ax+b)}{(2p+3)a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(ax+b)^2}{\left(p+\frac{3}{2}\right)^{2|1} \cdot a^2} \right]$$



$$(a-b)^{n|d} = a^{n|d} - n \cdot a^{n-1|d} b^{1|d} + (n)_2 a^{n-2|d} b^{2|d} - \dots \\ \dots (-)^n (n)_n b^{n|d}.$$

rd nämlich  $p+m+r=a$ ,  $m+1=b$ ,  $d=1$ ,  $r-1=n$  gesetzt, geht die eingeschlossene Reihe über in

$$(p+r-1)^{r-1|1} = (p+1)^{r-1|1}.$$

Einführung dieses Werthes führt zu folgender Darstellung:

$$\int_{0,1}^r x^m (1-x)^p (\partial x)^r = \frac{1^{p|1} 1^{m|1} (p+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1} 1^{p+m+r|1}} = \frac{1^{m|1} 1^{p+r-1|1}}{1^{r-1|1} 1^{p+m+r|1}}.$$

ess fällt mit 10) zusammen, und somit sind die Eigenschaften des Eulerschen Integrals höherer Ordnung ermittelt.

Setzt man  $r=1$ , so ist wie bekannt:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^p \partial x = \frac{1^{m|1} 1^{p|1}}{1^{p+m+1|1}} = \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(p+1)}{\Gamma(p+m+2)} = \frac{(1,1)^m \cdot (1,1)^p}{(1,1)^{p+m+1}}.$$

at man  $r+\frac{s}{q}$  statt  $r$ , so wird

$$14) \int_{0,1}^{r+\frac{s}{q}} x^m (1-x)^p (\partial x)^{r+\frac{s}{q}} = \frac{1^{m|1} 1^{p+r+\frac{s}{q}-1|1}}{1^{p+m+r+\frac{s}{q}|1} 1^{r+\frac{s}{q}-1|1}} \\ = \frac{1^{m|1} (s+rq)^{p|q} q^{m+r}}{1^{\frac{s}{q}|1} (s+q)^{p+m+r|q}}.$$

aus entsteht für

$$\frac{s}{q} = \frac{1}{2} \text{ und } r=0, 1, 2, \dots:$$

$$15) \int_{0,1}^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^p (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{m|1} 1^{p|2} 2^{m+1}}{3^{p+m|2} \sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{\frac{3}{2}} x^m (1-x)^p (\partial x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1^{m|1} 3^{p|2} 2^{m+2}}{3^{p+m+1|2} \sqrt{\pi}},$$

$$\int_{0,1}^{r+\frac{1}{2}} x^m (1-x)^p (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{m+1} 5^{p+2} 2^{m+3}}{3^{p+m+2} 2 \sqrt{\pi}},$$

$$\vdots$$

$$\int_{0,1}^{r+\frac{1}{2}} x^m (1-x)^p (\partial x)^{r+\frac{1}{2}} = \frac{1^{m+1} (2r+1)^p 2^{m+r+1}}{3^{p+m+r} 2 \sqrt{\pi}}.$$

Die in 10) und 12) gefundene Gleichung lässt sich auch unmittelbar aus dem  $r^{\text{ten}}$  Differenzial Nr. 1) ableiten. Setzt man nämlich wie vorhin  $b=1$ ,  $a=-1$  und 1 statt  $x$ , so hat man aus dieser Gleichung, da alle Glieder mit Ausnahme des  $(p+1)^{\text{ten}}$  verschwinden:

$$16) \quad \partial^r x^m (1-x)^p = (-)^{p \cdot r} p!^{-1} m^{r-p-1} (\partial x)^r.$$

Wird hierin  $-r$  statt  $r$  gesetzt, so erhält man

$$\int_{0,1}^r x^m (1-x)^p (\partial x)^r = \frac{r^{p+1}}{(m+1)^{r+p+1}} = \frac{1^{m+1} \cdot 1^{p+r-1}}{1^{r-1} \cdot 1^{m+r+p+1}}.$$

Die hier gegebenen Nachweisungen dürften in so weit nicht ohne Bedeutung sein, als sie den Zusammenhang zwischen den Fundamentalsätzen der Differenzial- und Integral-Rechnung unzweifelhaft aufdecken, und deswegen für eine systematische Begründung dieser wichtigen Doctrinen sich geltend machen. Sie zeigen, wie diess in der Natur der Sache liegt, dass die bestimmten Integrale denselben Gesetzen unterliegen, wie die Differenziale, wenn diess auch bisher nicht gezeigt wurde. Würde diess die einzige Ausbeute, welche hier gewonnen wurde, so möchte es schon genügen, um die Aufmerksamkeit der hier mitgetheilten Methode zuzuwenden. Sie gewährt aber ausserdem den Vortheil grosser Einfachheit und Leichtigkeit in Handhabung des Calculs, und eine nicht verkennbare Allgemeinheit für den Ueblick in den zu gewinnenden Resultaten.

Es mag hier genügen auf diese Sätze aufmerksam gemacht zu haben. Das reiche Material, welches hier zur Verarbeitung vorliegt, wird uns Veranlassung bieten, wieder auf diesen Gegenstand zurückzukommen.



## XIX.

### Einige Bemerkungen über die näherungsweise Auflösung einer Gleichung mit einer unbekannten Grösse und zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen.

Von  
dem Herausgeber.

---

Es giebt bekanntlich eine sehr einfache annähernde Auflösung der Gleichungen mit einer unbekannten Grösse, vorausgesetzt nämlich, dass man schon einen ersten Näherungswerth der unbekannten Grösse kennt. Diese Auflösung stellt man gewöhnlich als eine Art von Regula Falsi dar. Indess lässt sich dieselbe auch in sehr einfacher Weise aus einem geometrischen Gesichtspunkte auffassen, wie ich jetzt zeigen will.

Die aufzulösende Gleichung sei überhaupt

$$f(x) = 0,$$

und  $\xi$  sei ein schon bekannter erster Näherungswerth der gesuchten unbekannten Grösse. Man nehme nun zwei dem  $\xi$  sehr nahe kommende Werthe  $x_1$  und  $x_2$  an, und berechne die entsprechenden Werthe der Function  $f(x)$ , welche wir durch

$$u_1 = f(x_1), \quad u_2 = f(x_2)$$

bezeichnen wollen. Die Gleichung

$$u=f(x)$$

kann man sich überhaupt durch eine Curve dargestellt denken, und die durch die Coordinaten  $x_1, u_1$  und  $x_2, u_2$  bestimmten Punkte werden zwei sehr nahe bei einander liegende Punkte dieser Curve sein. Bezeichnen wir aber den wahren Werth der gesuchten unbekannten Grösse durch  $\varepsilon$ , so dass

$$f(\varepsilon)=0$$

ist, so wird, wie aus allen vorher gemachten Voraussetzungen sich auf der Stelle ergibt, auch der durch die Coordinaten  $\varepsilon, 0$  bestimmte Punkt ( $\varepsilon 0$ ) unserer Curve sehr nahe bei den Punkten ( $x_1 u_1$ ) und ( $x_2 u_2$ ) liegen. Der durch die drei Punkte ( $\varepsilon 0$ ), ( $x_1 u_1$ ), ( $x_2 u_2$ ) gehende Theil der Curve wird also, eben weil diese drei Punkte sehr nahe bei einander liegen, näherungsweise mit der durch die beiden Punkte ( $x_1 u_1$ ) und ( $x_2 u_2$ ) der Lage nach bestimmten geraden Linie zusammenfallen; und entwickelt man also die Gleichung

$$u=ax+b$$

dieser geraden Linie, so wird man  $\varepsilon$  näherungsweise erhalten, wenn man es aus der Gleichung

$$0=a\varepsilon+b$$

bestimmt. Weil aber unsere gerade Linie durch die beiden Punkte ( $x_1 u_1$ ) und ( $x_2 u_2$ ) geht, so haben wir zur Bestimmung der Constanten  $a, b$  die beiden Gleichungen

$$u_1=ax_1+b, \quad u_2=ax_2+b;$$

aus denen sich

$$u_1-u_2=a(x_1-x_2), \quad a=\frac{u_1-u_2}{x_1-x_2}$$

ergibt. Nun erhält man aber aus dem Obigen auch die Gleichung

$$u-u_1=a(x-x_1)$$

oder

$$u-u_2=a(x-x_2);$$

also ist die Gleichung unserer geraden Linie

$$u - u_1 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

oder

$$u - u_2 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} (x - x_2);$$

und zur Bestimmung von  $x$  hat man also die Gleichung

$$u - u_1 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) \quad \text{oder} \quad u - u_2 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2} (x - x_2),$$

woraus sich

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2} u_1 \quad \text{oder} \quad x = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{u_1 - u_2} u_2,$$

also

$$x = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{u_1 - u_2}$$

ergibt.

Dies sind die aus der Algebra bekannten Näherungsformeln. Wie man sich derselben zur successiven Annäherung bedient, braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Es war mir interessant zu untersuchen, ob sich mittelst einer ähnlichen geometrischen Auffassungsweise nicht auch Näherungsformeln zur Auflösung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen finden lassen. Was eine von mir angestellte desfallsige kleine Untersuchung ergeben hat, will ich im Folgenden mittheilen.

Die zwei aufzulösenden Gleichungen seien überhaupt

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0;$$

und  $\xi, \eta$  seien zwei schon bekannte erste Näherungswerthe der gesuchten unbekannten Grössen. Man nehme nun drei Systeme den  $\xi, \eta$  sehr nahe kommender Werthe an, welche wir durch

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3$$

bezeichnen wollen, und berechne die entsprechenden Werthe der Functionen  $f(x, y)$  und  $F(x, y)$ , die durch

$$u_1 = f(x_1, y_1), \quad U_1 = F(x_1, y_1);$$

$$u_2 = f(x_2, y_2), \quad U_2 = F(x_2, y_2);$$

$$u_3 = f(x_3, y_3), \quad U_3 = F(x_3, y_3)$$

bezeichnet werden mögen, wo also

$$u_1, u_2, u_3; \quad U_1, U_2, U_3$$

sämmtlich der Null sehr nahe kommende Grössen sind. Die Gleichungen

$$u = f(x, y), \quad U = F(x, y)$$

kann man überhaupt als die Gleichungen zweier auf dasselbe Coordinatensystem bezogener krummer Flächen betrachten, und die gesuchten Werthe der beiden unbekannten Grössen, welche wir durch  $\xi, \eta$  bezeichnen wollen, so dass

$$f(\xi, \eta) = 0, \quad F(\xi, \eta) = 0$$

ist, sind dann eigentlich die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Curven, in denen die Ebene der  $xy$  von den beiden in Rede stehenden krummen Flächen geschnitten wird. Hält man aber alle obigen Voraussetzungen fest, so wird auf der Stelle erhellen, dass man näherungsweise  $\xi, \eta$  als die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien betrachten kann, in denen von den beiden durch die drei Punkte

$$(x_1 y_1 u_1), \quad (x_2 y_2 u_2), \quad (x_3 y_3 u_3)$$

und durch die drei Punkte

$$(x_1 y_1 U_1), \quad (x_2 y_2 U_2), \quad (x_3 y_3 U_3)$$

gelegten Ebenen die Ebene der  $xy$  geschnitten wird.

Bezeichnen wir nun die Gleichungen dieser beiden Ebenen durch

$$ax + by + cu + 1 = 0,$$

$$Ax + By + Cu + 1 = 0;$$

so sind

$$ax + by + 1 = 0,$$

$$Ax + By + 1 = 0$$

die Gleichungen der Durchschnittslinien dieser beiden Ebenen mit

der Ebene der  $xy$ , und  $x, y$  müssen daher aus den beiden Gleichungen

$$ax + by + 1 = 0,$$

$$Ax + By + 1 = 0$$

bestimmt werden, was nicht die mindeste Schwierigkeit hat, wenn man die constanten Coefficienten  $a, b$  und  $A, B$  kennt. Zur Bestimmung dieser constanten Coefficienten hat man aber nach dem Obigen die Gleichungen

$$ax_1 + by_1 + cu_1 + 1 = 0,$$

$$ax_2 + by_2 + cu_2 + 1 = 0,$$

$$ax_3 + by_3 + cu_3 + 1 = 0$$

und

$$Ax_1 + By_1 + CU_1 + 1 = 0,$$

$$Ax_2 + By_2 + CU_2 + 1 = 0,$$

$$Ax_3 + By_3 + CU_3 + 1 = 0.$$

Aus dem ersten dieser beiden Systeme von Gleichungen ergeben sich zuvörderst durch Elimination von  $a$  die beiden folgenden Gleichungen:

$$b(x_1y_2 - x_2y_1) + c(x_1u_2 - x_2u_1) + x_1 - x_2 = 0,$$

$$b(x_2y_3 - x_3y_2) + c(x_2u_3 - x_3u_2) + x_2 - x_3 = 0;$$

und wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen  $b$  eliminirt, so erhält man:

$$c = - \frac{(x_1 - x_2)(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_2 - x_3)(x_1y_2 - x_2y_1)}{(x_1u_2 - x_2u_1)(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_2u_3 - x_3u_2)(x_1y_2 - x_2y_1)}.$$

Den Zähler dieses Bruchs bringt man leicht auf die Form:

$$-x_2\{(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)\},$$

und den Nenner auf die Form:

$$-x_2\{u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)\}.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\Omega_{1,2} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$\Omega_{2,3} = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$$\Omega_{3,1} = x_3 y_1 - x_1 y_3;$$

so ist

$$c = - \frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

und ganz ebenso:

$$C = - \frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}}.$$

Hat man mittelst dieser beiden Formeln  $c$  und  $C$  bestimmt, so erhält man

$$a, b; A, B; \kappa, \eta$$

mittelst der folgenden Gleichungen:

$$ax_1 + by_1 = -(1 + cu_1),$$

$$ax_2 + by_2 = -(1 + cu_2);$$

$$Ax_1 + By_1 = -(1 + CU_1),$$

$$Ax_2 + By_2 = -(1 + CU_2);$$

$$a\kappa + b\eta = -1,$$

$$A\kappa + B\eta = -1;$$

wo

$$1 + cu_1 = - \frac{(u_1 - u_2)\Omega_{3,1} + (u_1 - u_3)\Omega_{1,2}}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

$$1 + cu_2 = - \frac{(u_2 - u_1)\Omega_{2,3} + (u_2 - u_3)\Omega_{1,2}}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}}$$

und

$$1 + CU_1 = - \frac{(U_1 - U_2)\Omega_{3,1} + (U_1 - U_3)\Omega_{1,2}}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}},$$

$$1 + CU_2 = - \frac{(U_2 - U_1)\Omega_{2,3} + (U_2 - U_3)\Omega_{1,2}}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}}$$

ist.

Man kann natürlich die Grössen  $a, b; A, B; \varepsilon, \eta$  auch leicht völlig entwickelt darstellen; für die praktische Rechnung scheinen mir aber die folgenden Formeln die bequemsten zu sein:

$$\Omega_{1,2} = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$\Omega_{2,3} = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

$$\Omega_{3,1} = x_3 y_1 - x_1 y_3;$$

$$c = - \frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

$$C = - \frac{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}};$$

$$ax_1 + by_1 = -(1 + cu_1),$$

$$ax_2 + by_2 = -(1 + cu_2);$$

$$Ax_1 + By_1 = -(1 + CU_1),$$

$$Ax_2 + By_2 = -(1 + CU_2);$$

$$a\varepsilon + b\eta = -1,$$

$$A\varepsilon + B\eta = -1.$$

Ohne Schwierigkeit erhält man:

$$a = - \frac{y_1(u_2 - u_3) + y_2(u_3 - u_1) + y_3(u_1 - u_2)}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}},$$

$$b = \frac{x_1(u_2 - u_3) + x_2(u_3 - u_1) + x_3(u_1 - u_2)}{u_1 \Omega_{2,3} + u_2 \Omega_{3,1} + u_3 \Omega_{1,2}};$$

und

$$A = - \frac{y_1(U_2 - U_3) + y_2(U_3 - U_1) + y_3(U_1 - U_2)}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}},$$

$$B = \frac{x_1(U_2 - U_3) + x_2(U_3 - U_1) + x_3(U_1 - U_2)}{U_1 \Omega_{2,3} + U_2 \Omega_{3,1} + U_3 \Omega_{1,2}};$$

oder

$$a = c \frac{y_1(u_2 - u_3) + y_2(u_3 - u_1) + y_3(u_1 - u_2)}{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}},$$

$$b = -c \frac{x_1(u_2 - u_3) + x_2(u_3 - u_1) + x_3(u_1 - u_2)}{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}};$$

und

$$A = C \frac{y_1(U_2 - U_3) + y_2(U_3 - U_1) + y_3(U_1 - U_2)}{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}},$$

$$B = -C \frac{x_1(U_2 - U_3) + x_2(U_3 - U_1) + x_3(U_1 - U_2)}{\Omega_{1,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{3,1}}.$$

Zur Bestimmung von  $\varepsilon$ ,  $\eta$  hat man die Formeln:

$$\varepsilon = \frac{b - B}{aB - bA}, \quad \eta = -\frac{a - A}{aB - bA}.$$

Hiermit will ich diese kurze Skizze schliessen, indem ich die weitere Entwicklung dem Leser überlasse.

Sehr bemerkenswerthe Formeln zur näherungsweise Auflö-  
sung zweier Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen hat be-  
kanntlich Gauss in der Theoria motus. p. 136. gegeben, die  
ich in meinen Optischen Untersuchungen. Theil II. §. 28.  
S. 175. mittelst der Differentialrechnung bewiesen und in §. 40.  
S. 288. auf  $n$  Gleichungen mit  $n$  unbekannten Grössen zu erwei-  
tern gesucht habe. Ich benutze diese Gelegenheit, diese For-  
meln den Lesern in Erinnerung zu bringen.

---



## XX.

**Démonstration élémentaire de la vitesse de  
déviation du plan d'oscillation du pendule,  
à diverses latitudes.**

Par

**M. Crahay,**

membre de l'Académie.

(Ins. des Bulletins de l'Académie Royale des sciences etc. de Belgique.  
Tome XIX. I. Partie. 1852. p. 537.)

La présente note a pour but unique de montrer, à l'aide des mathématiques élémentaires, la relation qui existe entre la vitesse de déviation du plan d'oscillation et la latitude du lieu où se fait l'expérience. Je considère le phénomène dans sa plus grande simplicité, sans m'occuper des causes qui peuvent modifier périodiquement le mouvement du plan, dont je supposerai constante la vitesse angulaire autour de la verticale. C'est dans le travail de mon savant confrère, M. Schaar, que la question, envisagée sous toutes ses faces, a été traitée à fond.

Soit (Tab. III. Fig. 10.)  $PEP'F$  une section de la terre, supposée sphérique, par un plan méridien,  $O$  son centre,  $PP'$  l'axe du mouvement diurne, et soit  $L$  un lieu situé sur le parallèle  $ELF$ , de l'hémisphère boréal. La droite  $OLl$  représente, à un instant donné, la position de la verticale du lieu, dont  $PLP'$  est le cercle méridien, tandis que la droite  $LM$ , perpendiculaire en  $L$  à la verticale, et comprise dans le plan du méridien, est la ligne méridienne du lieu; elle rencontre en  $M$  le prolongement de l'axe.

Dans l'espace d'un jour sidéral, la rotation de la terre fait tourner la verticale  $Ol$  et la méridienne  $LM$ , autour de l'axe

$PP'$ , des surfaces de cônes droits, qui ont le cercle  $EF$  pour base commune, et dont les sommets sont placés respectivement en  $O$  et en  $M$ . Après un certain temps, que nous supposons très-court, le lieu  $L$  aura parcouru l'arc  $LL'$  du parallèle; la verticale du lieu aura pris la position  $OL'l'$ , le méridien celle  $PL'P'$ , tandis que la méridienne se trouvera en  $L'M$ .

Admettons qu'au départ en  $L$ , le plan d'oscillation soit dirigé suivant le plan du méridien, c'est-à-dire dans celui qui passe par la verticale  $Ol$  et par la méridienne  $LM$ . Ce plan d'oscillation serait toujours exactement parallèle à lui-même, malgré son déplacement dans l'espace par la rotation du globe, si la pesanteur ne le ramenait continuellement à passer par le centre de la terre; mais c'est là aussi la seule modification que sa position éprouve par suite du mouvement diurne, de sorte que lorsque le lieu  $L$  est arrivé en  $L'$ , le plan d'oscillation sera déterminé par la verticale  $Ol'$  et par une droite  $L'M'$  parallèle à la méridienne  $LM$ . Ainsi à l'arrivée en  $L'$ , le plan d'oscillation  $M'L'l'$  forme avec le plan  $ML'l'$  du méridien du lieu un angle horizontal  $ML'M'$ , lequel, à cause de la petitesse que nous supposons à l'arc  $LL'$ , peut être considéré comme égal à l'angle  $LML'$  des lignes méridiennes aux deux endroits  $L$  et  $L'$ . C'est l'angle de déviation apparente que l'on observe au plan d'oscillation, mais, dans la réalité, c'est l'angle dont la méridienne  $LM$  a changé de position dans l'espace par la rotation de la terre.

Pour déterminer cet angle, menons les droites  $LN$ ,  $L'N$  vers le centre du parallèle, celles  $LO$ ,  $L'O$  vers le centre de la terre, enfin, par le milieu  $R$  de la corde  $LL'$ , menons des droites vers  $N$  et vers  $M$ , elles sont perpendiculaires à cette corde, et forment les angles opposés en  $N$  et en  $M$  en deux parties égales.

Désignons par  $r$  le rayon de la terre, par  $h$  l'angle horaire  $LNL'$ , par  $H$  l'angle de déviation  $LML'$  du plan d'oscillation, par  $\lambda$  la latitude du lieu.

Le triangle  $LNO$ , rectangle en  $N$  et dans lequel l'angle  $NOL$  est le complément de la latitude, donne

$$NL = r \cdot \cos \lambda;$$

Du triangle  $LNR$ , rectangle en  $R$ , on déduit

$$LR = NL \cdot \sin \frac{1}{2} LNL' = r \cdot \cos \lambda \cdot \sin \frac{1}{2} h.$$

Le triangle  $MLO$ , rectangle en  $L$ , donne

$$ML = r \cdot \cotang \lambda.$$

Enfin le triangle  $LMR$ , rectangle en  $R$ , fournit la relation

$$\sin \frac{1}{2} LML' = \frac{LR}{LM},$$

ou

$$\sin \frac{1}{2} H = \frac{\cos \lambda \sin \frac{1}{2} h}{\cotang \gamma} = \sin \frac{1}{2} h \sin \lambda.$$

Maintenant, comme dans le passage de  $L$  en  $L'$ , la méridienne  $LM$  décrit une portion de la surface convexe du cône, il faut, pour que l'angle plan  $LML'$  représente, sans erreur sensible, l'espace angulaire parcouru réellement par cette génératrice, que cet angle, de même que celui  $LNL'$ , soit très-petit, et tellement que les arcs qui les mesurent puissent être substitués à leurs sinus; ce qui conduit, après suppression du facteur commun  $\frac{1}{2}$ , à l'expression

$$H = h \sin \lambda.$$

Ainsi, pour un arc  $h$  parcouru par le point  $L$  de la terre, le plan d'oscillation semble se mouvoir autour de la verticale, dans le sens du mouvement apparent du ciel, d'un angle  $H$ , dont la valeur est  $h \sin \lambda$ .

Nous avons supposé que le plan d'oscillation coïncidait, au départ, avec le plan du méridien; mais on se convaincra facilement que s'il formait alors avec ce dernier un angle azimutal quelconque, sa déviation de cette position aurait la même valeur  $H$  après le parcours de l'arc  $h$ . D'où il suit aussi qu'à chaque instant la même relation existe entre les arcs  $H$  et  $h$ ; et comme le mouvement de rotation est uniforme, celui du plan d'oscillation l'est pareillement.

La rotation complète de la terre s'exécutant en 24 heures sidérales ou en  $23^h 56' 4'', 09$  de temps solaire moyen, il s'ensuit qu'en une seconde de temps moyen l'arc parcouru est de  $15'', 041$ . Tel est aussi aux pôles, le mouvement angulaire du plan d'oscillation, tandis qu'à notre latitude, supposée de  $51^\circ$ , le mouvement angulaire du plan n'est que de  $0,77715$  de cette valeur; ce chiffre étant le sinus naturel de la latitude; par conséquent le mouvement du plan y est de  $11'', 689$  seulement. — Et pour faire le tour entier, il faudrait  $30^h 47' 52''$  de temps moyen, tandis qu'aux pôles, il est exécuté en un jour sidéral. — Pour que le plan décrive un angle de  $n$  secondes à notre latitude, il lui faut  $\frac{n}{11,689}$  secondes de temps moyen.

Dans l'hémisphère austral du globe, la déviation du plan d'oscillation a lieu dans le sens opposé de son mouvement dans l'hémisphère boréal; c'est-à-dire qu'il y suit encore la direction du mouvement apparent du ciel.

La construction graphique, d'accord avec la formule  $H=h.\sin\lambda$ , montre qu'à mesure que le lieu  $L$  est situé plus près de l'équateur, les deux méridiennes  $LM$ ,  $L'M$  s'approchent de plus en plus du parallélisme, l'angle de déviation  $H$  diminue, et il est nul à l'équateur; qu'au contraire, il augmente quand la distance à l'un des pôles diminue, et qu'au pôle il est égal à l'angle horaire  $h$  lui-même.

La construction montre encore comment le mouvement angulaire  $LNL'$ , autour de l'axe  $PP'$ , peut être rapporté à un autre axe  $OLL$  incliné au premier, à l'aide de deux composantes rotatives, l'une autour du nouvel axe  $Ol$ , l'autre d'une droite  $LM$ , méridienne du point  $L$ ; la première de ces composantes est l'angle  $MLM'$  ou  $H$ , dont la valeur est  $h\sin\lambda$ ; l'autre composante est l'angle  $LOL'$ , dont la pesanteur fait tourner le plan d'oscillation, pour le diriger constamment vers le centre de la terre. La valeur de ce dernier angle, que nous désignerons par  $C$ , se déduit du triangle  $LOR$ , rectangle en  $R$ , qui donne

$$\sin\frac{1}{2}C = \frac{LR}{LO} = \sin\frac{1}{2}h\cos\lambda,$$

substituant les arcs aux sinus, et effaçant le facteur commun  $\frac{1}{2}$ , on a

$$C=h.\cos\lambda.$$

## XXI.

### Sur le théorème d'Euler, relatif à la décomposition du mouvement de rotation des corps.

Note par

**M. Pagani,**

membre de l'Académie.

des den Bulletins de l'Académie Royale des sciences etc. de Belgique.  
(Tome XIX. II. Partie. 1852. p. 161.)

Les expériences récentes, par lesquelles on a constaté la déclinaison du plan d'oscillation du pendule, ont ramené l'attention des géomètres sur le beau théorème d'Euler, au moyen duquel on peut expliquer assez simplement la loi de cette déclinaison. Mais pour mettre l'explication de ce phénomène à la portée de ceux qui ne sont point familiarisés avec les calculs supérieurs, il manquait à la science une démonstration élémentaire de ce théorème, que l'on doit considérer comme le corrélatif de celui qui porte le nom de parallélogramme des forces, et qui sert aussi à la composition et à la décomposition du mouvement d'un point matériel. Cette corrélation est formulée dans les théorèmes suivants :

**Théorème 1.** Si l'on a (Tab. III. Fig. 11.) un point matériel  $C$ , animé dans la direction  $CA$  d'une vitesse  $P=CA$ , et si l'on imprime, par un moyen quelconque, au point  $C$  une vitesse  $Q=CB$  dans la direction  $CB$ ; le point  $C$  ira dans la direction  $CD$  avec une vitesse  $R=CD$ , en désignant par  $CD$  la diagonale du parallélogramme construit sur les droites  $CA$  et  $CB$ , considérées comme côtés adjacents. En outre, si l'on désigne l'angle  $ACD$  par  $\alpha$ , et l'angle  $BCD$  par  $\beta$ , on aura les relations :

$$P:Q:R::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta).$$

Ce théorème renferme, comme on sait, toute la théorie de la composition et de la décomposition du mouvement de translation.

**Théorème II.** Si l'on a un corps qui tourne autour de la droite  $CA$  avec une vitesse angulaire  $p$  proportionnelle à  $CA$ , et si l'on imprime, par un moyen quelconque, au même corps, autour de la droite  $CB$ , une vitesse angulaire  $q$  proportionnelle à  $CB$ , le corps tournera autour de la droite  $CD$  avec une vitesse angulaire  $n$  proportionnelle à la diagonale  $CD$  du parallélogramme construit sur les droites  $CA$  et  $CB$ , considérées comme côtés adjacents. En outre, si l'on désigne l'angle  $ACD$  par  $\alpha$ , et l'angle  $BCD$  par  $\beta$ , on aura les relations

$$p:q:n::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta).$$

**Démonstration.** Du point  $C$  comme centre, et avec un rayon égal à l'unité de longueur, traçons, dans le plan de la figure un cercle qui coupe en  $a$ ,  $d$ ,  $b$  les droites  $CA$ ,  $CD$ ,  $CB$ .

En vertu de la vitesse angulaire  $p$ , le point  $d$  s'élèvera au-dessus du plan de la figure, et décrira, dans un temps excessivement court  $\tau$  un arc de cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite  $CA$ , et dont le rayon est égal à  $\sin\alpha$ . Donc le point  $d$  s'élèvera perpendiculairement au plan de la figure d'une quantité égale à  $\tau p \sin\alpha$ . Mais en vertu de la vitesse angulaire  $q$ , le point  $d$ , pendant le temps  $\tau$ , s'abaissera, perpendiculairement au plan de la figure, d'une quantité égale à  $\tau q \sin\beta$ . D'ailleurs, on doit avoir, d'après les définitions des quantités  $p$ ,  $q$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , et les propriétés connues des triangles :

$$(1) \quad \dots \quad p:q::\sin\beta:\sin\alpha,$$

d'où l'on tire

$$\tau p \sin\alpha = \tau q \sin\beta;$$

donc, en vertu des vitesses angulaires simultanées  $p$  et  $q$ , le point  $d$  restera en repos. Mais ceci ne peut avoir lieu que si le corps tourne autour de la droite  $CD$ ; donc la première partie du théorème est démontrée.

Maintenant, le corps tournant autour de  $CD$  avec une vitesse angulaire  $n$ , le point  $b$  s'élèvera perpendiculairement au plan de la figure et décrira dans le temps  $\tau$  un espace égal à  $\tau n \sin\beta$ . Or, cette quantité doit être égale à l'espace  $\tau p \sin(\alpha+\beta)$  que le point  $b$  décrirait en vertu de la vitesse angulaire  $p$  autour de  $CA$ , puisque ce point ne change pas de position en vertu de la vitesse angulaire  $q$ . On aura donc

$$\tau n \sin\beta = \tau p \sin(\alpha+\beta).$$

En combinant cette équation avec l'équation (1), on en déduit immédiatement

$$(2). \quad p:q:n::\sin\beta:\sin\alpha:\sin(\alpha+\beta). \text{ C.Q.F.D.}$$

**Corollaire I.** Si l'on imprime à un corps trois mouvements simultanés de rotation autour des arêtes contiguës d'un parallélépipède, et que les vitesses angulaires de ces mouvements soient proportionnelles à ses trois arêtes, il en résultera une rotation unique autour de la diagonale du parallélépipède, avec une vitesse angulaire proportionnelle à cette diagonale.

**Corollaire II.** Réciproquement, tout mouvement de rotation autour de la diagonale d'un parallélépipède avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de cette diagonale peut toujours se décomposer, à chaque instant, en trois rotations simultanées autour des arêtes du parallélépipède avec des vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs de ces arêtes.

Ces propositions se démontrent de la même manière que leurs corrélatives dans la théorie de la composition et de la décomposition du mouvement de translation.

**Corollaire III.** En supposant le parallélépipède rectangle, on aura les relations

$$p = n \cos \lambda, \quad q = n \cos \mu, \quad r = n \cos \nu,$$

dans lesquelles  $p, q, r$  désignent les vitesses angulaires componentes,  $n$  la vitesse angulaire résultante, et  $\lambda, \mu, \nu$  les angles que font les arêtes avec la diagonale.

**Corollaire IV.** Si l'angle  $\nu$  est droit, on aura  $\cos \nu = 0$ ,  $\cos \mu = \sin \lambda$ , et les dernières équations donneront

$$(3) \quad \dots p = n \cos \lambda, \quad q = n \sin \lambda.$$

Donc, le mouvement de rotation de la terre autour de l'axe du monde avec la vitesse angulaire  $n$ , peut être considéré à chaque instant comme le résultat de deux rotations instantanées autour de l'horizontale menée par le centre de la terre dans le plan du méridien d'un lieu quelconque, et autour de la verticale du même lieu avec les vitesses angulaires respectives  $p$  et  $q$ , fournies par les équations (3).

---

## XXII.

### Miscellen.

---

#### Problem.

Jahre lang fortgesetzte Beobachtungen bei der Sprengung von Felsen in den Steinbrüchen, so wie endlich ein eigens zu diesem Zweck angestelltes Experiment haben den Unterzeichneten auf folgende Sätze geführt:

1) Eine solide, d. h. eine nach Dichtigkeit und Cohäsion in allen ihren Theilen durchaus gleiche Kugel, wird mittelst einer durch ein elastisches Fluidum (Pulver- oder Wasserdampf) bewirkten Explosion vom Centrum aus in vier gleiche Stücke zerlegt, und zwar spitzen sich die vier Stücke im Mittelpunkt dreiseitig-pyramidalförmig zu, so dass die Bruchflächen wirkliche Ebenen sind und die Kugeloberfläche in ihrer Zerreiſsung genau das tetraedrische Kugelnetz zeigt.

2) Geschieht die Sprengung, unter übrigens denselben Voraussetzungen, nicht vom Centrum aus, so entstehen dennoch nur vier, jedoch ungleiche Stücke.

3) Kleinere Abweichungen nach Cohäsion und Dichtigkeit liefern eben so nur vier Hauptstücke, die etwas ungleich ausfallen können; neben einer grössern oder geringern Anzahl von Splintern, die sämmtlich mit weit grösserer Geschwindigkeit fortgeschleudert werden.



**Es** wird nun das Problem gestellt, diese Sätze auf **theoretischem Wege** zu beweisen, so wie die Frage aufgeworfen, ob sich **nicht** aus diesen Sätzen gewisse Folgerungen ziehen liessen in **Beziehung** auf die zahlreiche Gruppe der Asteroiden, so wie in **Beziehung** auf unsere Meteore, worunter namentlich der **Steinregen?**

Brenner in Tuttlingen.

In Bezug auf obige Aufgabe bemerke ich, dass Herr Brenner im Württembergischen Schulwochenblatt. 1852. Nr. 10. einen Aufsatz unter folgendem Titel veröffentlicht hat:

**Einiges über die Zertrümmerungen fester Körper, sowie besonders über die Vermuthung der Astronomen, dass die Gruppe der kleinen Planeten die Trümmerstücke eines einzigen seien.**

In diesem Aufsätze sind Anwendungen der in obigem Problem **zur** theoretischen Beweisführung vorgelegten Sätze, von deren **Richtigkeit** Herr Brenner sich durch Versuche überzeugt hat, **auf** die Asteroiden gemacht. Da indess Herr Brenner in einem **an** mich gerichteten Briefe vom 20. November 1852 selbst sagt, **dass** der in Rede stehende Aufsatz jetzt, wo bereits 20 und mehr **Asteroiden** entdeckt seien, weniger Werth habe als früher, wo **diess** noch nicht der Fall war, so lasse ich diesen Aufsatz nicht **wiederholt** im Archive abdrucken, sondern begnüge mich vorläufig **mit** der Mittheilung des obigen von Herrn Brenner gestellten **Problems** und insbesondere des nicht uninteressanten **Erfahrungsergebnisses** über das Sprengen von Steinen, von dem in diesem **Problem** die Rede ist.

**Absichtlich** stelle ich aber dieses Problem nicht unter die Rubrik „**Uebungsaufgaben**“, sondern theile es unter den „**Miscellen**“ mit, womit sich ja wohl Herr Brenner einverstanden erklären wird.

Der Herausgeber.

---

Jeder weiss, wie störend z. B. bei Sextantenbeobachtungen u. s. w. das Zittern des Quecksilberhorizonts bei Erschütterungen **des** Gebäudes durch vorüberfahrende Wagen u. dergl. ist. In dem **Magazin** für die Literatur des Auslandes. 1853. No. 27. S. 106. wird folgende dasselbe völlig beseitigen sollende **Vorrichtung** angegeben, die ihre Erfindung den Herren Mauvais und Seguin verdankt:

„Ein starker eiserner Haken war an der Decke des Zimmers befestigt; an diesem Haken war mittelst eines Doppelseiles ein Ring von Kautschuk angehängt, der aus einem Kautschukstreifen gebildet war, dessen Enden über einander gebogen und mit Bindfaden zusammengebunden waren. An diesem Kautschukringe hing an Stricken das Brett, auf welchem das mit Quecksilber gefüllte Gefäß wie auf einer Wagschaale stand. Man wartete, bis Alles an dieser Vorrichtung in's Gleichgewicht und zur Ruhe gekommen war und betrachtete dann mit einem auf die Quecksilberfläche gerichteten Fernrohre die Spiegelbilder verschiedener irdischer Gegenstände; ihre Umrisse waren vollkommen feststehend und scharf begränzt.“

Es wird vulkanisirtes Kautschuk empfohlen und bemerkt, dass man darunter Kautschuk verstehe, welches längere Zeit in geschmolzenem Schwefel oder Schwefelarsenik gelegen; dieses behalte seine Elastacität bei jeder Temperatur, während das gewöhnliche Kautschuk bei 3° hart werde.

---

Man weiss, dass; wenn in einen Kegelschnitt ein beliebiges Sechseck  $ABCDEF$  beschrieben ist, die Durchschnittspunkte der Seiten

$AB$  und  $DE$ ,  $BC$  und  $EF$ ,  $CD$  und  $FA$

immer in einer und derselben geraden Linie liegen. In dem Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Zweiter Band. Leipzig. 1852. S. 133. ff. zeigt Bessel, dass, wenn  $A, B, C, D, E, F$  sechs auf einem Kegelschnitt liegende Punkte in beliebiger Lage sind, immer die Durchschnittspunkte der Linien

$AB$  und  $CD$ ,  $AE$  und  $CF$ ,  $BF$  und  $DE$

in einer und derselben geraden Linie liegen.

---

In dem „Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Herausgegeben von A. Erman. Zweiter Band. Leipzig. 1852. S. 135. und S. 137.“ findet man (von Bessel) folgende trigonometrische Relationen angeführt:

$$\begin{aligned} & \sin(a-b)\cos(A+B+C) + \sin(A-B)\cos(a+b+C) \\ & = \cos(B-b)\sin(A+a+C) - \cos(A-a)\sin(B+b+C) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & - \sin(a-b)\sin(A+B+C) - \sin(A-B)\sin(a+b+C) \\ & = \cos(B-b)\cos(A+a+C) - \cos(A-a)\cos(B+b+C). \end{aligned}$$

In dem mehr erwähnten Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel. Thl. I. S. 363. theilt Bessel seinem Freunde folgenden Satz mit:

„Wenn in dem rechten Winkel  $abc$  eine Ellipse so gedreht wird, dass  $ab$  und  $bc$  immer Tangenten von ihr sind: so ist der Ort ihres Mittelpunktes ein Kreisbogen, um  $b$  mit dem Halbmesser  $a\sqrt{2-ee}$  beschrieben, dessen Sehne gleich

$$a\sqrt{2(1 - \sqrt{1-ee})}$$

ist.

In den „Kurzen Erinnerungen an Momente meines Lebens. Jugendzeit — erste 25 Jahre“ welche Bessel in seiner letzten schmerzhaften Krankheit geschrieben hat, die ihn wenige Wochen später am 17. März 1846 den Seinigen und der Wissenschaft entriss, und die in dem Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Erster Theil. Leipzig. 1852. S. IX — S. XXX. abgedruckt sind, findet sich auf S. XXIII. die in dem Munde eines solchen Mannes wichtige und deshalb von Lehrern zu beherzigende pädagogisch-mathematische Aeusserung:

„In Untertertia des Mindener Gymnasiums“ — bis zu welcher Klasse nämlich Bessel gekommen war, bevor er zum Kaufmanns-~~schule~~ überging — „wurde zwar Unterricht in den ersten Anfangs-~~metrie~~ metrie ertheilt, allein ich glaube, dass dieser

Anfang, wenn er ohne Fortsetzung bleibt, nicht geeignet ist, einen Begriff von dem eigentlichen Wesen der Mathematik zu erzeugen. Die Anfangsgründe der allgemeinen Rechenkunst und Algebra würden dies schon eher leisten.“

### L e h r s a t z.

Wenn  $x^2 + y^2 = z^2$  ist, so ist  $x^m + y^m < z^m$  oder  $x^m + y^m > z^m$ , jenachdem  $m > 2$  oder  $m < 2$  ist.

#### Beweis.

Man setze  $x = az$ ,  $y = bz$ , so ist nach der Voraussetzung

$$a^2 z^2 + b^2 z^2 = z^2, \text{ also } a^2 + b^2 = 1;$$

folglich ist

$$a < 1, \quad b < 1$$

indem wir den Fall, wenn Eine der beiden Grössen  $x$ ,  $y$  oder  $a$   $b$  der Null gleich wäre, ausschliessen wollen.

Ist nun  $m > 2$ , so ist, weil  $a < 1$ ,  $b < 1$  ist, offenbar

$$a^m < a^2, \quad b^m < b^2; \text{ also } a^m + b^m < a^2 + b^2;$$

folglich nach dem Obigen

$$a^m + b^m < 1,$$

also

$$a^m z^m + b^m z^m < z^m, \text{ d. i. } (az)^m + (bz)^m < z^m;$$

folglich nach dem Obigen:

$$x^m + y^m < z^m.$$

Ist aber  $m < 2$ , so ist, weil  $a < 1$ ,  $b < 1$  ist, offenbar

$$a^m > a^2, \quad b^m > b^2; \text{ also } a^m + b^m > a^2 + b^2;$$

folglich nach dem Obigen

$$a^m + b^m > 1,$$

also

$$a^m z^m + b^m z^m > z^m, \text{ d. i. } (az)^m + (bz)^m > z^m;$$

folglich nach dem Obigen

$$x^m + y^m > z^m.$$

**Anmerkung.** Der Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  genügen die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

G.

---

In den „Astronomischen Nachrichten. Nr. 849.“ findet man einen interessanten Aufsatz von Herrn Doctor G. Schweizer, Astronomen des Konstantin'schen Messinstitutes zu Moskau, in welchem Herr Dr. Schweizer in sehr überzeugender Weise einen Zusammenhang der bei totalen Sonnenfinsternissen beobachteten Protuberanzen mit den Sonnenfackeln nachweist. Die grosse Sonnenfinsterniss vom 28sten Juli 1851 hat Herr Dr. Schweizer in Machnowka im Kiew'schen Gouvernement beobachtet. Schon vom  $\frac{27. \text{ Juni}}{9. \text{ Juli}}$  an liess Herr Dr. Schweizer von den damaligen Zöglingen des genannten Instituts, jetzigen Offizieren Herrn Petschkowski und Troizki, sehr sorgfältige Zeichnungen der Sonnenflecken und Sonnenfackeln anfertigen, und theils die nachherigen Beobachtungen der Sonnenfinsterniss in Machnowka, theils von anderen Orten her bekannt gewordene Beobachtungen zeigten Protuberanzen bei gleichen Positionen wie die vorher gezeichneten Sonnenflecken, ja es liess sich auch selbst eine Aehnlichkeit in den Gestalten erkennen. Wir können hier uns nicht weiter über diesen Gegenstand auslassen, verweisen aber unsere Leser dringend auf den jedenfalls höchst interessanten Aufsatz des Herrn Doctor Schweizer, den wir für sehr wichtig halten.

In dem lesenswerthen Programm der Ritterakademie zu L  
nitz von Ostern 1853 (m. s. Literar. Bericht Nr. LXXIX.)  
Herr Inspector Gent daselbst den folgenden einfachen Be  
des Lhuillier'schen Ausdrucks für den vierten Theil des sph  
schen Excesses gegeben.

Nach den Gauss'schen Gleichungen ist:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) \mp \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\sin \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \mp \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) \mp \sin(90^\circ - \frac{1}{2}C)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \mp \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}c};$$

also nach bekannten Zerlegungen:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \sin \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}{\sin \frac{1}{2}C} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{4}(a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \frac{1}{2}c}, \end{aligned}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \cos \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}{\sin \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{4}(a+b+c) \cos \frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\sin \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \cos \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{4}(-a+b+c) \sin \frac{1}{4}(a-b+c)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \sin \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{4}(-a+b+c) \cos \frac{1}{4}(a-b+c)}{\cos \frac{1}{2}c}.$$

len beiden ersten und den beiden letzten Gleichungen folgt  
Division:

$$\tan \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \tan \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)$$

$$= \tan \frac{1}{4}(a+b+c) \tan \frac{1}{4}(a+b-c),$$

$$\tan \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \cot \frac{1}{4}(A+B-C+180^\circ)$$

$$= \tan \frac{1}{4}(-a+b+c) \tan \frac{1}{4}(a-b+c).$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen in einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \tan \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ)^2 \\ &= \tan \frac{1}{4}(a+b+c) \tan \frac{1}{4}(-a+b+c) \tan \frac{1}{4}(a-b+c) \tan \frac{1}{4}(a+b- \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \tan \frac{1}{4}(A+B+C-180^\circ) \\ &= \sqrt{\tan \frac{1}{4}(a+b+c) \tan \frac{1}{4}(-a+b+c) \tan \frac{1}{4}(a-b+c) \tan \frac{1}{4}(a+b- \end{aligned}$$

welches der gesuchte Ausdruck ist.



## XXIII.

Ueber Interpolation und mechanische  
Quadratur.

Von  
dem Herausgeber.

---

## Einleitung.

In meiner der mechanischen Quadratur gewidmeten Abhandlung, welche im Archiv Thl. XIV. Nr. XX. abgedruckt ist, habe ich zunächst vorzüglich eine strenge Entwicklung der berühmten Formeln von Cotes und der nicht minder wichtigen und berühmten Correctionsformeln von Stirling, welche früher überhaupt noch nicht streng entwickelt und bewiesen worden waren, zu geben versucht, dann aber auch gezeigt, wie man zu den Formeln von Gauss, wenigstens in so weit dieselben hauptsächlich Anwendung finden dürften, gelangen kann, ohne übrigens, wie Gauss in höchst scharfsinniger Weise gethan hat, diese wichtigen Formeln ganz allgemein zu entwickeln. Alle so eben genannten Formeln zeichnen vor allen übrigen zur mechanischen Quadratur in Vorschlag gebrachten Formeln besonders dadurch sich vorthellhaft aus, dass sie, um in geometrischem Sinne zu sprechen, nicht unbedingt erfordern, die Ordinaten in gleichen Abständen zu nehmen. Ausser diesen Formeln giebt es zur mechanischen Quadratur noch andere besonders zum Gebrauche in der Astronomie und in den Naturwissenschaften überhaupt geeignete Formeln, welche die Ordinaten in gleichen Abständen zu nehmen erfordern, unter denen sich hauptsächlich eine Formel durch grosse Eleganz und Leichtigkeit der Anwendung auszeichnet, welche Laplace in der *Mécanique céleste*. Tome IV. Livre IX. No. 5. anführt,

ohne zu bemerken, dass diese Formel wohl eigentlich ursprünglich von Lagrange (*Mémoires de Berlin*. 1772.) herrührt\*). Laplace gelangt zu dieser Formel in seiner bekannten gewöhnlichen Weise mittelst seiner *Fonctions génératrices*. Der gewöhnlichen Differenzenrechnung bedienen sich Lacroix im *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*. Tome III. p. 182. und in ganz gleicher Weise Pontécoulant in der *Théorie analytique du système du monde*. Tome II. p. 105. Alle diese Entwicklungen lassen aber besonders rücksichtlich der Allgemeinheit jedenfalls noch Manches zu wünschen übrig, und namentlich scheint mir auch die in Rede stehende, nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthe Formel, überhaupt noch nicht unter dem richtigen Gesichtspunkte und in gehöriger Allgemeinheit dargestellt worden zu sein, weshalb ich versuchen will, in der vorliegenden Abhandlung eine möglichst strenge und allgemeine Entwicklung dieser höchst wichtigen und merkwürdigen Formel zu geben, die hauptsächlich für die Berechnung der Störungen der Planeten und Cometen grosse Vortheile darzubieten scheint, weshalb sie auch dazu von Laplace und Pontécoulant vorzüglich in Vorschlag gebracht worden ist. Besonders scheint dies aber der Fall zu sein, wenn man die Störungsrechnungen nicht mehr in der älteren Weise, sondern in der neuen an sich ganz elementaren Form führt, welche neuerlich besonders von Encke in den *Astronomischen Nachrichten*. Nr. 791. 792., früher, wie Encke in Nr. 814. desselben *Journals* selbst bemerkt, schon von George P. Bond, Gehülfen an der Sternwarte zu Cambridge in Nordamerika, in Vorschlag gebracht worden ist, wobei ich jedoch zu bemerken nicht unterlassen darf, dass Encke in den angeführten Abhandlungen auch ausführlich und in eigenthümlicher Weise gezeigt hat, wie die mechanische Quadratur bei der neuen Form der Störungsrechnungen nach seiner Meinung am besten in Ausführung zu bringen ist.

Die Entwicklung der erwähnten Laplace'schen oder Lagrange'schen Quadraturformel, welche ich in dieser Abhandlung geben werde, steht aber in so enger Verbindung mit der Theorie der Interpolation bei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten, dass ich auch diese Theorie in ihren Hauptmomenten zu entwickeln genöthigt bin, hoffe aber, dass meine Entwicklung derselben durch ihre Eigenthümlichkeit das Interesse der Leser einigermaßen in Anspruch zu nehmen geeignet sein wird. Die berühmten Newton'schen Interpolationsformeln, zu deren Entwicklung sich Laplace in der *Théorie analytique des probabilités* Livre I. Chap. I. No. 4. gleichfalls der *Théorie des fonctions génératrices* bedient hat, werde ich, um diese Abhandlung für jetzt nicht zu sehr auszudehnen, in einer späteren Abhandlung in möglichst einfacher und elementarer Weise zu entwickeln suchen.

---

\*) M. s. Mathematisches Wörterbuch. Thl. IV. S. 165.

## §. 1.

Das Interpolationsproblem kann im Allgemeinen auf folgende Art ausgesprochen werden:

Es sei eine Reihe von Grössen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

und eine zweite Reihe gleich vieler Grössen

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

gegeben. Man soll eine Function  $y=f(x)$  von  $x$  von solcher Beschaffenheit finden, dass dieselbe, wenn man der unabhängigen veränderlichen Grösse  $x$  die Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

beilegt, respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält, so dass also

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2), \quad \dots y_n=f(x_n)$$

ist.

Man kann sich die gegebenen  $n+1$  Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

der unabhängigen veränderlichen Grösse  $x$  als Abscissen, die gegebenen Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

der Function  $y=f(x)$  als die diesen Abscissen entsprechenden Ordinaten in einem beliebigen Coordinatensystem denken, und wird dann sogleich übersehen, dass das allgemeine Interpolationsproblem, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, auf die folgende geometrische Aufgabe zurückkommt:

Durch  $n+1$  gegebene Punkte in einer Ebene eine Curve zu ziehen, oder die Gleichung einer Curve zu finden, welche durch  $n+1$  gegebene Punkte in einer Ebene geht.

Aus dieser geometrischen Fassung der Aufgabe ergibt sich auf der Stelle, dass das Interpolationsproblem im Allgemeinen eine unbestimmte Aufgabe ist, weil durch  $n+1$  gegebene Punkte offenbar unendlich viele eben so vielen verschiedenen Gesetzen unterworfenen Curven gezogen werden können.

## §. 2.

Wegen der Uebestimmtheit des Interpolationsproblems im Allgemeinen ist es nöthig, dasselbe durch Hinzufügung besonderer Bedingungen zu einer bestimmten Aufgabe zu machen. Dass auch hierin dem mathematischen Scharfsinne wieder ein grosser Spielraum verstattet ist, bedarf kaum einer besonderen Bemerkung. Um uns aber für jetzt der Form anzuschliessen, unter welcher das Interpolationsproblem vorzugsweise in der Astronomie und in den Naturwissenschaften Anwendung findet, wollen wir uns die folgende Aufgabe vorlegen:

Man soll eine ganze rationale algebraische Function  $y=f(x)$  des  $n$ ten Grades von solcher Beschaffenheit finden, dass dieselbe, wenn man ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse  $x$  die  $n+1$  gegebenen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

beilegt, respective die  $n$  ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält, so dass

$$y_0=f(x_0), \quad y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2), \quad \dots \quad y_n=f(x_n)$$

ist.

Der Auflösung dieser in jeder Beziehung höchst wichtigen Aufgabe werden unsere folgenden Untersuchungen lediglich gewidmet sein.

## §. 3.

Zuerst und vor allen Dingen muss man zeigen, dass das Interpolationsproblem unter der ihm im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Fassung eine völlig bestimmte Aufgabe ist. Die folgenden Betrachtungen werden geeignet sein, uns hiervon vollkommen zu überzeugen.

• Ueberhaupt sei

$$X = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \dots + a_{k-1} x + a_k$$

eine beliebige ganze rationale algebraische Function des  $k$ ten Grades von  $x$ , welche für  $x = x_0$  verschwindet, so dass also

$$0 = a_0 x_0^k + a_1 x_0^{k-1} + a_2 x_0^{k-2} + \dots + a_{k-1} x_0 + a_k$$

ist. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen ergibt sich durch Subtraction auf der Stelle:

$$X = a_0(x^k - x_0^k) + a_1(x^{k-1} - x_0^{k-1}) + \dots + a_{k-1}(x - x_0),$$

und die Function  $X$  ist also, weil bekanntlich allgemein

$$\frac{a^\mu - b^\mu}{a - b} = a^{\mu-1} + a^{\mu-2}b + a^{\mu-3}b^2 + \dots + ab^{\mu-2} + b^{\mu-1}$$

ist, durch die Grösse  $x - x_0$  ohne Rest theilbar, so dass nämlich der Quotient, welchen man erhält, wenn man in  $X$  mit  $x - x_0$  dividirt, jederzeit eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-1)$ sten Grades ist.

Hieraus lässt sich ferner leicht herleiten, dass die ganze rationale algebraische Function  $X$ , wenn dieselbe verschwindet, wenn man für  $x$  irgend einen der sämmtlich unter einander ungleichen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

setzt, wo die Anzahl  $n+1$  dieser Werthe nicht grösser als  $k$  sein soll, jederzeit durch das Product

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ohne Rest theilbar, und dass der Quotient eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-n-1)$ sten Grades ist.

Weil nämlich nach der Voraussetzung  $X$  für  $x = x_0$  verschwindet, so ist nach dem Vorhergehenden, wenn man

$$X = (x - x_0)X_0$$

setzt,  $X_0$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-1)$ sten Grades von  $x$ .

Nach der Voraussetzung verschwindet aber  $X$  auch für  $x = x_1$ . Also muss das Product

$$(x - x_0)X_0$$

für  $x=x_1$  verschwinden, und da nun nach der Voraussetzung  $x_0$  und  $x_1$  ungleich sind, also  $x-x_0$  für  $x=x_1$  nicht verschwindet, so muss  $X_0$  für  $x=x_1$  verschwinden, so dass also nach dem Obigen, wenn man

$$X_0 = (x - x_1)X_1$$

setzt,  $X_1$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-2)$ ten Grades von  $x$  ist. Daher ist nun nach dem Vorhergehenden

$$X = (x - x_0)(x - x_1)X_1.$$

Nach der Voraussetzung verschwindet aber  $X$  auch für  $x=x_2$ . Also muss das Product

$$(x - x_0)(x - x_1)X_1$$

für  $x=x_2$  verschwinden, und da nun nach der Voraussetzung  $x_0$ ,  $x_1$  und  $x_2$  unter einander ungleich sind, also  $(x-x_0)(x-x_1)$  für  $x=x_2$  nicht verschwindet, so muss  $X_1$  für  $x=x_2$  verschwinden, so dass also nach dem Obigen, wenn man

$$X_1 = (x - x_2)X_2$$

setzt,  $X_2$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-3)$ ten Grades von  $x$  ist. Daher ist nach dem Obigen

$$X = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)X_2.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich unter den gemachten Voraussetzungen:

$$X = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)X_n,$$

wo  $X_n$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-n-1)$ -sten Grades bezeichnet, so dass also  $X$  jederzeit durch das Product

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ohne Rest theilbar ist, wie behauptet wurde.

Wir wollen nun annehmen, dass die beiden beliebigen ganzen rationalen algebraischen Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  von  $x$  für die sämmtlich unter einander verschiedenen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

von  $x$ , deren Anzahl  $n+1$  grösser sein soll als der Grad jeder der beiden Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$ , gleiche Werthe erhalten; so lässt sich leicht zeigen, dass die beiden Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  identisch, d. h. für jeden Werth von  $x$ , einander gleich sein müssen.

Wäre nämlich nicht identisch, d. h. für jeden Werth von  $x$ ,  $\varphi(x) = \psi(x)$ , so wäre

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

eine ganze rationale algebraische Function von  $x$ , die nicht identisch, d. h. für jeden Werth von  $x$ , gleich Null wäre, und der Grad dieser Function, welchen wir durch  $k$  bezeichnen wollen, wäre unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls kleiner als  $n+1$ . Nach der Voraussetzung erhalten aber die Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  für die  $n+1$  ungleichen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$  gleiche Werthe; also verschwindet die ganze rationale algebraische Function

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

des  $k$ ten Grades von  $x$ , wo  $k$  kleiner als  $n+1$  ist, für die  $n+1$  ungleichen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$ . Daher ist nach dem Obigen

$$\begin{aligned} & \varphi(x) - \psi(x) \\ &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1}) X_{k-1}, \end{aligned}$$

wo  $X_{k-1}$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(k-k)$ -ten oder 0ten Grades, d. h. eine constante Grösse ist; und da nun  $\varphi(x) - \psi(x)$  nicht identisch gleich Null ist, so verschwindet offenbar diese constante Grösse  $X_{k-1}$  nicht.

Nun verschwindet aber nach dem Obigen

$$\varphi(x) - \psi(x)$$

auch für die Werthe

$$x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n$$

von  $x$ . Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$0 = (x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1}) X_{k-1},$$

$$0 = (x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_{k-1}) X_{k-1},$$

$$0 = (x_{k+2} - x_0)(x_{k+2} - x_1)(x_{k+2} - x_2) \dots (x_{k+2} - x_{k-1}) X_{k-1},$$

u. s. w.

$$0 = (x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{k-1}) X_{k-1};$$

und da nun nach der Voraussetzung die Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

sämmtlich unter einander ungleich sind, so verschwindet keines der Producte

$$(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2) \dots (x_k - x_{k-1}),$$

$$(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_{k-1}),$$

$$(x_{k+2} - x_0)(x_{k+2} - x_1)(x_{k+2} - x_2) \dots (x_{k+2} - x_{k-1}),$$

u. s. w.

$$(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{k-1}).$$

Also muss offenbar  $X_{k-1}$  verschwinden.

Da dies dem Vorhergehenden widerspricht, so muss unsere obige Annahme, dass die Functionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  nicht identisch, d. h. für jedes  $x$ , einander gleich wären, falsch sein, und diese beiden Functionen sind daher unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit identisch einander gleich, wie behauptet wurde.

Hieraus ergibt sich aber unmittelbar, dass das Interpolationsproblem unter der im vorhergehenden Paragraphen ihm gegebenen Fassung eine vollständig bestimmte Aufgabe ist, d. h. dass jede ganze rationale algebraische Function  $y$  des  $n$ ten Grades von  $x$  vollständig bestimmt ist, wenn man die den  $n+1$  ungleichen Werthen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$  entsprechenden Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

dieser Function kennt, weil nämlich nach dem Vorhergehenden alle ganze rationale algebraische Functionen des  $n$ ten Grades von  $x$ , welche für die  $n+1$  ungleichen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$  die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhalten, unter einander identisch sind. Kann man, was hierbei immer vorausgesetzt wird, nur eine ganze rationale algebraische Function  $y$  des  $n$ ten Grades von  $x$  finden, welche für die  $n+1$  ungleichen Werthe



$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$  die gegebenen Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält, so ist dadurch die Function  $y$ , welche bei dem Interpolationsproblem gesucht wird, ganz im Allgemeinen gefunden. Wie nun aber eine solche Function jederzeit gefunden werden kann, soll im Folgenden gezeigt werden.

#### §. 4.

Unseren fernerer Untersuchungen über das Interpolationsproblem schicken wir die folgende Betrachtung über die Functionen überhaupt voraus.

Es sei  $f(x)$  eine ganz beliebige Function von  $x$ , so hat man für jedes  $x$  und  $\omega$  die folgende identische Gleichung:

$$f(x+\omega) = f(x) + \omega \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\varphi(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}$$

setzen, die Gleichung

$$1) \quad f(x+\omega) = f(x) + \omega \varphi(x).$$

In dieser Gleichung setze man nun, was offenbar verstattet ist, für  $x$  und  $\omega$  respective  $x+\Delta x$  und  $\omega-\Delta x$ , wo  $\Delta x$  ebenfalls eine ganz beliebige Grösse bezeichnet; so erhält man

$$f(x+\omega) = f(x+\Delta x) + (\omega-\Delta x)\varphi(x+\Delta x).$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung 1) ab, so ergibt sich:

$$0 = f(x+\Delta x) - f(x) + (\omega-\Delta x)\varphi(x+\Delta x) - \omega\varphi(x).$$

oder

$$0 = f(x+\Delta x) - f(x) + (\omega-\Delta x)\{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\} - \varphi(x)\Delta x,$$

also

$$2) \quad 0 = \Delta f(x) + (\omega-\Delta x)\Delta\varphi(x) - \varphi(x)\Delta x.$$

Setzen wir in dieser Gleichung für  $x$  und  $\omega$  wieder respective  $x+\Delta x$  und  $\omega-\Delta x$ , so erhalten wir

$$0 = \Delta f(x+\Delta x) + (\omega-2\Delta x)\Delta\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x+\Delta x)\Delta x,$$

also, wenn wir von dieser Gleichung die Gleichung 2) abziehen:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) \\ &\quad + (\omega-2\Delta x)\Delta\varphi(x+\Delta x) - (\omega-\Delta x)\Delta\varphi(x) \\ &\quad - \{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\}\Delta x \\ &= \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) \\ &\quad + (\omega-2\Delta x)\{\Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi(x)\} - \Delta\varphi(x)\Delta x \\ &\quad - \{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\}\Delta x, \end{aligned}$$

folglich

$$3) \quad 0 = \Delta^2 f(x) + (\omega-2\Delta x)\Delta^2\varphi(x) - 2\Delta\varphi(x)\Delta x.$$

Wird in dieser Gleichung für  $x$  und  $\omega$  wieder respective  $x+\Delta x$  und  $\omega-\Delta x$  gesetzt, so ergiebt sich:

$$0 = \Delta^2 f(x+\Delta x) + (\omega-3\Delta x)\Delta^2\varphi(x+\Delta x) - 2\Delta\varphi(x+\Delta x)\Delta x,$$

also, wenn man von dieser Gleichung die Gleichung 3) abzieht:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta^2 f(x+\Delta x) - \Delta^2 f(x) \\ &\quad + (\omega-3\Delta x)\Delta^2\varphi(x+\Delta x) - (\omega-2\Delta x)\Delta^2\varphi(x) \\ &\quad - 2\{\Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi(x)\}\Delta x \\ &= \Delta^2 f(x+\Delta x) - \Delta^2 f(x) \\ &\quad + (\omega-3\Delta x)\{\Delta^2\varphi(x+\Delta x) - \Delta^2\varphi(x)\} - \Delta^2\varphi(x)\Delta x \\ &\quad - 2\{\Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi(x)\}\Delta x, \end{aligned}$$

folglich

$$4) \quad 0 = \Delta^3 f(x) + (\omega-3\Delta x)\Delta^3\varphi(x) - 3\Delta^2\varphi(x)\Delta x.$$

Wie man auf diese Art immer weiter gehen kann, ist klar. Auch erhellet die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes auf der Stelle, ohne dass man dasselbe erst durch den Bernoulli'schen Schluss allgemein zu beweisen braucht. Es ist nämlich allgemein:

$$5) \quad 0 = \Delta^n f(x) + (\omega-n\Delta x)\Delta^n\varphi(x) - n\Delta^{n-1}\varphi(x)\Delta x.$$

Hieraus erhält man aber die folgenden Gleichungen:

$$f(x+\omega) = f(x) + \omega \varphi(x),$$

$$\varphi(x) = \frac{\Delta f(x)}{1\Delta x} + \frac{\omega - \Delta x}{1\Delta x} \Delta \varphi(x),$$

$$\Delta \varphi(x) = \frac{\Delta^2 f(x)}{2\Delta x} + \frac{\omega - 2\Delta x}{2\Delta x} \Delta^2 \varphi(x),$$

$$\Delta^2 \varphi(x) = \frac{\Delta^3 f(x)}{3\Delta x} + \frac{\omega - 3\Delta x}{3\Delta x} \Delta^3 \varphi(x),$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-2} \varphi(x) = \frac{\Delta^{n-1} f(x)}{(n-1)\Delta x} + \frac{\omega - (n-1)\Delta x}{(n-1)\Delta x} \Delta^{n-1} \varphi(x),$$

$$\Delta^{n-1} \varphi(x) = \frac{\Delta^n f(x)}{n\Delta x} + \frac{\omega - n\Delta x}{n\Delta x} \Delta^n \varphi(x);$$

welche ferner durch ein einfaches Substitutionsverfahren sogleich zu der folgenden Gleichung führen:

$$\begin{aligned} f(x+\omega) &= f(x) + \frac{\omega}{1\Delta x} \Delta f(x) \\ &+ \frac{\omega(\omega - \Delta x)}{1.2\Delta x^2} \Delta^2 f(x) \\ &+ \frac{\omega(\omega - \Delta x)(\omega - 2\Delta x)}{1.2.3\Delta x^3} \Delta^3 f(x) \end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned} &+ \frac{\omega(\omega - \Delta x)(\omega - 2\Delta x) \dots (\omega - (n-1)\Delta x)}{1.2.3 \dots n \Delta x^n} \Delta^n f(x) \\ &+ \frac{\omega(\omega - \Delta x)(\omega - 2\Delta x) \dots (\omega - n\Delta x)}{1.2.3 \dots n \Delta x^n} \Delta^n \varphi(x), \end{aligned}$$

oder

$$f(x + \omega) = f(x)$$

$$+ \frac{\omega}{\Delta x} \Delta f(x)$$

$$+ \frac{\omega}{\Delta x} \left( \frac{\omega}{\Delta x} - 1 \right) \frac{1}{1.2} \Delta^2 f(x)$$

$$+ \frac{\omega}{\Delta x} \left( \frac{\omega}{\Delta x} - 1 \right) \left( \frac{\omega}{\Delta x} - 2 \right) \frac{1}{1.2.3} \Delta^3 f(x)$$

u. s. w.

$$+ \frac{\omega}{\Delta x} \left( \frac{\omega}{\Delta x} - 1 \right) \dots \left( \frac{\omega}{\Delta x} - n + 1 \right) \frac{1}{1.2.3 \dots n} \Delta^n f(x)$$

$$+ \frac{\omega}{\Delta x} \left( \frac{\omega}{\Delta x} - 1 \right) \dots \left( \frac{\omega}{\Delta x} - n + 1 \right) \frac{1}{1.2.3 \dots n} (\omega - n \Delta x) \Delta^n \varphi(x).$$

Bezeichnen wir aber in dieser Abhandlung die Binomialcoefficienten für den Exponenten  $k$  immer durch

$$(k)_0, (k)_1, (k)_2, (k)_3, (k)_4, \dots;$$

so können wir die obige Formel kürzer auf folgende Art drücken:

$$6) \quad f(x + \omega) = f(x) + \left( \frac{\omega}{\Delta x} \right)_1 \Delta f(x) + \left( \frac{\omega}{\Delta x} \right)_2 \Delta^2 f(x)$$

$$+ \left( \frac{\omega}{\Delta x} \right)_3 \Delta^3 f(x)$$

u. s. w.

$$+ \left( \frac{\omega}{\Delta x} \right)_n \Delta^n f(x)$$

$$+ (\omega - n \Delta x) \left( \frac{\omega}{\Delta x} \right)_n \Delta^n \varphi(x)$$

Wenn  $\Delta^n \varphi(x) = 0$  ist, so ist:

$$\begin{aligned}
7) \quad f(x+\omega) &= f(x) + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_1 \Delta f(x) + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_2 \Delta^2 f(x) \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_3 \Delta^3 f(x) \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n \Delta^n f(x).
\end{aligned}$$

Ist z. B.  $f(x) = x^n$ , indem  $n$  eine positive ganze Zahl bezeichnet, so ist

$$\varphi(x) = \frac{(x+\omega)^n - x^n}{\omega} = \frac{(x+\omega)^n - x^n}{(x+\omega) - x},$$

also nach einem bekannten, schon oben angewandten Satze:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (x+\omega)^{n-1} + (x+\omega)^{n-2}x \\
&\quad + (x+\omega)^{n-3}x^2 \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&\quad + (x+\omega)x^{n-2} \\
&\quad + x^{n-1},
\end{aligned}$$

woraus sich ergibt, dass in diesem Falle  $\varphi(x)$  eine ganze rationale algebraische Function des  $(n-1)$ sten Grades von  $x$ , und folglich nach einem bekannten Satze  $\Delta^n \varphi(x) = 0$  ist. Also ist nach 7):

$$\begin{aligned}
8) \quad (x+\omega)^n &= x^n + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_1 \Delta x^n + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_2 \Delta^2 x^n \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_3 \Delta^3 x^n \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&\quad + \left(\frac{\omega}{\Delta x}\right)_n \Delta^n x^n.
\end{aligned}$$

### §. 5.

Wir wollen nun die Reihe

$$(n)_\lambda, \quad -(\lambda+1)_1(n)_{\lambda+1}, \quad (\lambda+2)_2(n)_{\lambda+2}, \quad \dots, \quad (-1)^\mu(\lambda+\mu)_\mu(n)_{\lambda+\mu},$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und es ist folglich allgemein:

$$\varphi(\lambda, n) = (-1)^\mu (n)_\lambda (n - \lambda - 1)_\mu;$$

also

$$\begin{aligned} & (-1)^\mu (n)_\lambda \cdot (n - \lambda - 1)_\mu \\ &= (n)_\lambda - (\lambda + 1)_1 (n)_{\lambda+1} + (\lambda + 2)_2 (n)_{\lambda+2} + \dots + (-1)^\mu (\lambda + \mu)_\mu (n)_{\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

### §. 6.

Indem wir dem eigentlichen Interpolationsproblem nun näher treten, wollen wir annehmen, dass die gesuchte ganze rationale algebraische Function des  $n$ ten Grades von  $x$ , welche für

$$x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

erhalten soll, die Function

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

sei, wollen aber jetzt, wie wir schon früher bemerkt haben, die besondere Voraussetzung zum Grunde legen, dass die gegebenen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

der unabhängigen veränderlichen Grösse  $x$  eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden, deren beständige Differenz durch  $\Delta x_0$  bezeichnet werden mag.

Nach den Bedingungen der Aufgabe haben wir die Gleichung

$$y_0 = A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + A_3 x_0^3 + \dots + A_n x_0^n,$$

aus welcher sich nach bekannten Principien überhaupt die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
y_0 &= A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + A_3 x_0^3 + \dots + A_n x_0^n, \\
\Delta y_0 &= A_1 \Delta x_0 + A_2 \Delta \cdot x_0^2 + A_3 \Delta \cdot x_0^3 + \dots + A_n \Delta \cdot x_0^n, \\
\Delta^2 y_0 &= A_2 \Delta^2 \cdot x_0^2 + A_3 \Delta^2 \cdot x_0^3 + \dots + A_n \Delta^2 \cdot x_0^n, \\
\Delta^3 y_0 &= A_3 \Delta^3 \cdot x_0^3 + \dots + A_n \Delta^3 \cdot x_0^n, \\
\text{u. s. w.} &\quad \text{u. s. w.} \\
\Delta^{n-1} y_0 &= A_{n-1} \Delta^{n-1} \cdot x_0^{n-1} + A_n \Delta^{n-1} \cdot x_0^n, \\
\Delta^n y_0 &= A_n \Delta^n \cdot x_0^n;
\end{aligned}$$

wo die Grössen

$$y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^{n-1} y_0, \Delta^n y_0$$

aus der gegebenen Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

nach dem folgenden bekannten Schema berechnet werden müssen:

$$\begin{array}{ccccccc}
y_0 & & & & & & \\
y_1 & y_1 - y_0 & & & & & \\
y_2 & y_2 - y_1 & y_2 - 2y_1 + y_0 & & & & \\
y_3 & y_3 - y_2 & y_3 - 2y_2 + y_1 & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & & \text{u. s. w.} & \\
y_4 & y_4 - y_3 & y_4 - 2y_3 + y_2 & y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
y_{n-4} & y_{n-4} - y_{n-5} & & & & & \\
y_{n-3} & y_{n-3} - y_{n-4} & y_{n-3} - 2y_{n-4} + y_{n-5} & & & & \\
y_{n-2} & y_{n-2} - y_{n-3} & y_{n-2} - 2y_{n-3} + y_{n-4} & y_{n-2} - 3y_{n-3} + 3y_{n-4} - y_{n-5} & & \text{u. s. w.} & \\
y_{n-1} & y_{n-1} - y_{n-2} & y_{n-1} - 2y_{n-2} + y_{n-3} & y_{n-1} - 3y_{n-2} + 3y_{n-3} - y_{n-4} & & & \\
y_n & y_n - y_{n-1} & y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} & y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} & & & 
\end{array}$$

wo also

$$\begin{aligned}
y_0 &= y_0, \\
\Delta y_0 &= y_1 - y_0, \\
\Delta^2 y_0 &= y_2 - 2y_1 + y_0, \\
\Delta^3 y_0 &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \\
&\quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

$$\Delta^n y_0 = y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} - (n)_3 y_{n-3} + \dots + (-1)^n (n)_n y_0$$

ist. Natürlich wird man aber bei praktischen Anwendungen

$$y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots, \Delta^n y_0$$

nicht nach diesen Formeln, sondern in bekannter Weise durch successive Subtraction nach dem obigen Schema berechnen.

Zur Bestimmung der Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

der gesuchten Function

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

erhält man nun aber aus den obigen Gleichungen unmittelbar die folgenden recurrirenden Formeln:

$$A_n = \frac{\Delta^n y_0}{\Delta^n x_0^n},$$

$$A_{n-1} = \frac{\Delta^{n-1} y_0}{\Delta^{n-1} x_0^{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} x_0^n}{\Delta^{n-1} x_0^{n-1}} A_n,$$

$$A_{n-2} = \frac{\Delta^{n-2} y_0}{\Delta^{n-2} x_0^{n-2}} - \frac{\Delta^{n-2} x_0^{n-1}}{\Delta^{n-2} x_0^{n-2}} A_{n-1} - \frac{\Delta^{n-2} x_0^n}{\Delta^{n-2} x_0^{n-2}} A_n,$$

u. s. w.

u. s. w.

$$A_1 = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} - \frac{\Delta x_0^2}{\Delta x_0} A_2 - \frac{\Delta x_0^3}{\Delta x_0} A_3 - \dots - \frac{\Delta x_0^n}{\Delta x_0} A_n,$$

$$A_0 = y_0 - x_0 A_1 - x_0^2 A_2 - x_0^3 A_3 - \dots - x_0^{n-1} A_{n-1} - x_0^n A_n.$$

In diesen Formeln ist die erste Auflösung des Interpolationsproblems enthalten.

Häufig kommt bei Anwendungen der Fall vor, dass  $x_0 = 0$  ist. In diesem Falle hat man z. B. für  $n=5$  die folgenden recurrirenden Formeln, mittelst welcher sich die Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$$

bestimmen lassen:

$$A_5 = \frac{1}{120} \cdot \frac{\Delta^5 y_0}{\Delta x_0^5},$$



$$A_4 = \frac{1}{24} \cdot \frac{\Delta^4 y_0}{\Delta x_0^4} - 10 A_5 \Delta x_0,$$

$$A_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_0}{\Delta x_0^3} - 6 A_4 \Delta x_0 - 25 A_5 \Delta x_0^2,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x_0^2} - 3 A_3 \Delta x_0 - 7 A_4 \Delta x_0^2 - 15 A_5 \Delta x_0^3,$$

$$A_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} - 1 A_2 \Delta x_0 - 1 A_3 \Delta x_0^2 - 1 A_4 \Delta x_0^3 - 1 A_5 \Delta x_0^4,$$

$$A_0 = y_0.$$

Sich ähnliche Formeln für noch grössere Werthe von  $n$  zu berechnen, hat nicht die mindeste Schwierigkeit. Für den praktischen Gebrauch ist es natürlich vortheilhaft und nothwendig, dieselben bis zu einer möglichst hohen Gränze hin vorrätzig zu haben.

### §. 7.

Eine neue Auflösung unserer Aufgabe ergibt sich auf folgende Art.

Wenn wir die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrücke von

$$y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \dots \Delta^n y_0$$

nach der Reihe mit

$$1, \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1, \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2, \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3, \dots \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n$$

multipliciren und die erhaltenen Gleichungen dann zu einander addiren, so erhalten wir die Gleichung:

$$y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \cdot \Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \cdot \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \cdot \Delta^3 y_0 + \dots \\ + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n \cdot \Delta^n y_0$$

$$= A_0$$

$$+ A_1 \{ x_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta x_0 \}$$

$$+ A_2 \{ x_0^2 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta \cdot x_0^2 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 \cdot x_0^2 \}$$

$$+ A_3 \{ x_0^3 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta \cdot x_0^3 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 \cdot x_0^3 \\ + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \cdot \Delta^3 \cdot x_0^3 \}$$

u. s. w.

$$+ A_n \{ x_0^n + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta \cdot x_0^n + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 \cdot x_0^n + \dots \\ \dots + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \cdot \Delta^n \cdot x_0^n \}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung §. 4. 8) für  $x$  und  $\omega$  respective  $x_0$  und  $x-x_0$ , also  $x_0 + (x-x_0) = x$  für  $x + \omega$ , so erhalten wir den Ausdruck:

$$x^n = x_0^n + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta \cdot x_0^n + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 \cdot x_0^n + \dots \\ \dots + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \cdot \Delta^n \cdot x_0^n,$$

und folglich, wenn wir in dieser Formel nach und nach

$$n=1, 2, 3, 4, \dots n$$

setzen, nach dem Vorhergehenden:

$$y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \cdot \Delta^3 y_0 + \dots \\ \dots + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \cdot \Delta^n y_0 \\ = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n,$$

also, weil bekanntlich

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

ist:

$$= y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \cdot \Delta y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \cdot \Delta^2 y_0 + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \cdot \Delta^3 y_0 + \dots + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \cdot \Delta^n y_0,$$

Die Formel eine neue sehr bemerkenswerthe Auflösung des Interpolationsproblems liefert.

### §. 8.

Eine dritte Auflösung ergibt sich auf folgende Art.

Bekanntlich ist:

$$y_0 = y_0,$$

$$y_0 = y_1 - (1)_1 y_0,$$

$$y_0 = y_2 - (2)_1 y_1 + (2)_2 y_0,$$

$$y_0 = y_3 - (3)_1 y_2 + (3)_2 y_1 - (3)_3 y_0,$$

u. s. w.

$$y_0 = y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} - \dots + (-1)^n (n)_n y_0.$$

so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$y = y_0$$

$$+ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \{ y_1 - (1)_1 y_0 \}$$

$$+ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \{ y_2 - (2)_1 y_1 + (2)_2 y_0 \}$$

$$+ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \{ y_3 - (3)_1 y_2 + (3)_2 y_1 - (3)_3 y_0 \}$$

u. s. w.

$$+ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \{ y_n - (n)_1 y_{n-1} + (n)_2 y_{n-2} - \dots + (-1)^n (n)_n y_0 \}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ 1 - (1)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 + (2)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 - (3)_3 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (-1)^n (n)_n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \right\} y_0 \\
&+ \left\{ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 - (2)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 + (3)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 - \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (-1)^{n-1} (n)_{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \right\} y_1 \\
&+ \left\{ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 - (3)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + (-1)^{n-2} (n)_{n-2} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \right\} y_2 \\
&+ \left\{ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 - \dots + (-1)^{n-3} (n)_{n-3} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \right\} y_3 \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&+ \left\{ \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_{n-1} - (n)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \right\} y_{n-1} \\
&\quad + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n y_n
\end{aligned}$$

also nach dem in §. 5. bewiesenen Satze von den Binomialcoefficienten:

$$\begin{aligned}
y &= (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n y_0 \\
&+ (-1)^{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 2 \right)_{n-1} y_1 \\
&+ (-1)^{n-2} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 3 \right)_{n-2} y_2 \\
&+ (-1)^{n-3} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 4 \right)_{n-3} y_3 \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&+ (-1)^1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n \right)_1 y_{n-1} \\
&+ (-1)^0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n - 1 \right)_0 y_n.
\end{aligned}$$

Es ist aber allgemein:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_k \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - k - 1 \right)_{n-k} \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_0-\Delta x_0) \dots (x-x_0-(k-1)\Delta x_0)}{1.2.3 \dots k \Delta x_0^k} \\ & \times \frac{(x-x_0-(k+1)\Delta x_0)(x-x_0-(k+2)\Delta x_0) \dots (x-x_0-n\Delta x_0)}{1.2.3 \dots (n-k) \Delta x_0^{n-k}}, \end{aligned}$$

und weil nun bekanntlich

$$x_k - x_0 = k \Delta x_0,$$

$$x_k - x_1 = (k-1) \Delta x_0,$$

$$x_k - x_2 = (k-2) \Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_k - x_{k-2} = 2 \Delta x_0,$$

$$x_k - x_{k-1} = 1 \Delta x_0,$$

$$x_k - x_{k+1} = -1 \Delta x_0,$$

$$x_k - x_{k+2} = -2 \Delta x_0,$$

$$x_k - x_{k+3} = -3 \Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_k - x_n = -(n-k) \Delta x_0;$$

also, wenn man multiplicirt:

$$\begin{aligned} & (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \\ &= 1.2.3 \dots k \Delta x_0^k \cdot 1.2.3 \dots (n-k) \Delta x_0^{n-k} \cdot (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

ist, so ist nach dem Obigen offenbar:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_k \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - k - 1 \right)_{n-k} \\ &= (-1)^{n-k} \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1) \dots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \dots (x_k-x_n)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n-k} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_k \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - k - 1 \right)_{n-k} \\
&= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.
\end{aligned}$$

Insbesondere hat man noch zu merken, dass

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n \\
&= (-1)^n \frac{(x-x_0-\Delta x_0)(x-x_0-2\Delta x_0)\dots(x-x_0-n\Delta x_0)}{1.2.3\dots n \Delta x_0^n},
\end{aligned}$$

und folglich, weil

$$x_0 - x_1 = -1\Delta x_0,$$

$$x_0 - x_2 = -2\Delta x_0,$$

$$x_0 - x_3 = -3\Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_0 - x_n = -n\Delta x_0;$$

also

$$\begin{aligned}
& (x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n) \\
&= (-1)^n \cdot 1.2.3\dots n \Delta x_0^n
\end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)}
\end{aligned}$$

ist.

Daher ist jetzt nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
y = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)\dots(x_0-x_n)} y_0 \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\dots(x_1-x_n)} y_1
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)} y_2$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\dots(x_3-x_n)} y_3$$

u. s. w.

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\dots(x_n-x_{n-1})} y_n.$$

Diese merkwürdige, zuerst von Lagrange gefundene Interpolationsformel ist freilich hier eigentlich bloss für den Fall bewiesen worden, wenn die Grössen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Indess übersieht man auf den ersten Blick, dass die Grösse, durch welche wir vorher  $y$  ausgedrückt haben, ganz allgemein für

$$x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält, so dass also die obige Formel eine ganz allgemeine Interpolationsformel ist, d. h. dass durch dieselbe das Interpolationsproblem in der ihm in §. 2. gegebenen Fassung ganz allgemein, was auch die Grössen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

sein mögen, aufgelöst wird.

Aus der vorher bewiesenen Formel

$$y = (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n y_0$$

$$+ (-1)^{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 2 \right)_{n-1} y_1$$

$$+ (-1)^{n-2} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 3 \right)_{n-2} y_2$$

$$+ (-1)^{n-3} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 4 \right)_{n-3} y_3$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& + (-1)^1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n \right)_1 y_{n-1} \\
& + (-1)^0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n - 1 \right)_0 y_n
\end{aligned}$$

erhält man sogleich die folgende bemerkenswerthe Formel:

$$\begin{aligned}
x^n = & (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n x_0^n \\
& + (-1)^{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 2 \right)_{n-1} (x_0 + \Delta x_0)^n \\
& + (-1)^{n-2} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 3 \right)_{n-2} (x_0 + 2\Delta x_0)^n \\
& + (-1)^{n-3} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 4 \right)_{n-3} (x_0 + 3\Delta x_0)^n
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}
& + (-1)^1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n \right)_1 (x_0 + (n-1)\Delta x_0)^n \\
& + (-1)^0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n - 1 \right)_0 (x_0 + n\Delta x_0)^n
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
(-1)^n x^n = & \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_0 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 1 \right)_n x_0^n \\
& - \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_1 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 2 \right)_{n-1} (x_0 + \Delta x_0)^n \\
& + \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_2 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 3 \right)_{n-2} (x_0 + 2\Delta x_0)^n \\
& - \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_3 \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - 4 \right)_{n-3} (x_0 + 3\Delta x_0)^n
\end{aligned}$$

u. s. w.



$$+ (-1)^{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_{n-1} \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n \right)_1 (x_0 + (n-1)\Delta x_0)^n$$

$$+ (-1)^n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} \right)_n \left( \frac{x-x_0}{\Delta x_0} - n - 1 \right)_0 (x_0 + n\Delta x_0)^n,$$

wo für  $x_0$  und  $\Delta x_0$  alle beliebige Grössen gesetzt werden können.

### §. 9.

Gehen wir jetzt zu der mechanischen Quadratur über, so können wir die dieselbe betreffende Aufgabe im Allgemeinen auf folgende Art fassen:

Man soll eine ganze rationale algebraische Function  $Y=F(x)$  des  $(n+1)$ sten Grades von solcher Beschaffenheit finden, dass der Differentialquotient  $y=f(x)$  derselben, wenn ihrer unabhängigen veränderlichen Grösse  $x$  die  $n+1$  gegebenen Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

beigelegt werden, respective die  $n+1$  ebenfalls gegebenen Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält.

Um diese Aufgabe aufzulösen, brauchen wir, indem wir wieder annehmen, dass die gegebenen Grössen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

eine arithmetische Reihe des ersten Grades mit der constanten Differenz  $\Delta x_0$  bilden, nur etwa nach §. 6. die ganze rationale algebraische Function des  $n$ ten Grades

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

so zu bestimmen, dass dieselbe, wenn man für  $x$  die Werthe

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

setzt, respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält. Denn dann wird die gesuchte Function  $Y$  offenbar im Allgemeinen durch die Formel

$$Y = \int y dx,$$

also wegen des Obigen, wenn  $C$  eine willkürliche Constante bezeichnet, welche jederzeit aus den besonderen Bedingungen der jedesmaligen Aufgabe bestimmt werden muss, durch die Formel

$$Y = C + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1}$$

dargestellt, und daher unser Problem hierdurch vollständig gelöst sein, weil die Bestimmung der Coefficienten

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots A_n$$

schon in §. 6. vollständig gelehrt worden ist.

## §. 10.

Zu einer anderen Auflösung des Problems der mechanischen Quadratur führt die in §. 7. gegebene Bestimmung der Function  $y=f(x)$ . Dort ist nämlich gezeigt worden, dass immer

$$y = y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_0 + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 \Delta^3 y_0 + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_0$$

ist. Also kann offenbar,

$$Y = C + y_0 \int_{x_0}^x dx + \Delta y_0 \int_{x_0}^x \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_1 dx$$

$$+ \Delta^2 y_0 \int_{x_0}^x \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_2 dx$$

$$+ \Delta^3 y_0 \int_{x_0}^x \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_3 dx$$

u. s. w.

$$+ \Delta^n y_0 \int_{x_0}^x \left(\frac{x-x_0}{\Delta x_0}\right)_n dx$$

gesetzt werden, und die den einzelnen Werthen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

von  $x$  entsprechenden Werthe von  $Y$  erhält man, wenn man für die obere Gränze in den Integralen der obigen Formel nach und nach die vorstehenden Werthe setzt.

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$\frac{x - x_0}{\Delta x_0} = u,$$

also

$$x = x_0 + u \Delta x_0, \quad \partial x = \Delta x_0 \partial u;$$

wobei man zu bemerken hat, dass, weil

$$x_0 = x_0,$$

$$x_1 = x_0 + 1 \Delta x_0,$$

$$x_2 = x_0 + 2 \Delta x_0,$$

$$x_3 = x_0 + 3 \Delta x_0,$$

u. s. w.

$$x_n = x_0 + n \Delta x_0$$

ist, wenn

$$x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

ist, respective

$$u = 0, 1, 2, 3, \dots n$$

ist; so ist offenbar

$$Y = C + \Delta x_0 \left\{ y_0 \int_0^u (u)_0 \partial u + \Delta y_0 \int_0^u (u)_1 \partial u \right. \\ \left. + \Delta^2 y_0 \int_0^u (u)_2 \partial u \right. \\ \left. \text{u. s. w.} \right. \\ \left. + \Delta^n y_0 \int_0^u (u)_n \partial u \right\}$$

eine ganze rationale algebraische Function des  $n$ ten Grades von  $x$ , welche für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}$$

respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n+1}$$

erhält. Weil aber nach dem Obigen auch  $y$  für

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}$$

respective die Werthe

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n+1}$$

erhält, so muss nach dem in §. 3. bewiesenen Satze

$$y = y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_1 + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_1 + \dots + \left(\frac{x-x_1}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_1$$

oder

$$y = y_1 + (u-1)_1 \Delta y_1 + (u-1)_2 \Delta^2 y_1 + \dots + (u-1)_n \Delta^n y_1$$

sein. In ganz ähnlicher Weise ist

$$y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_2 + \dots + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_2$$

oder

$$y_2 + (u-2)_1 \Delta y_2 + (u-2)_2 \Delta^2 y_2 + \dots + (u-2)_n \Delta^n y_2$$

eine ganze rationale algebraische Function des  $n$ ten Grades von  $x$ , welche für

$$x = x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{n+2}$$

respective die Werthe

$$y_2, y_3, y_4, y_5, \dots, y_{n+2}$$

erhält. Nach dem Obigen erhält aber auch  $y$  für

$$x = x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_{n+2}$$

respective die Werthe

$$y_2, y_3, y_4, y_5, \dots, y_{n+2}.$$

ist nach dem in §. 3. bewiesenen Satze:

$$y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_1 \Delta y_2 + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_2 \Delta^2 y_2 + \dots + \left(\frac{x-x_2}{\Delta x_0}\right)_n \Delta^n y_2$$

$$y = y_2 + (u-2)_1 \Delta y_2 + (u-2)_2 \Delta^2 y_2 + \dots + (u-2)_n \Delta^n y_2.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, ist klar, und man erdaher überhaupt die folgenden Gleichungen:

$$y_0 + (u)_1 \Delta y_0 + (u)_2 \Delta^2 y_0 + \dots + (u)_n \Delta^n y_0,$$

$$y_1 + (u-1)_1 \Delta y_1 + (u-1)_2 \Delta^2 y_1 + \dots + (u-1)_n \Delta^n y_1,$$

$$y_2 + (u-2)_1 \Delta y_2 + (u-2)_2 \Delta^2 y_2 + \dots + (u-2)_n \Delta^n y_2,$$

$$y_3 + (u-3)_1 \Delta y_3 + (u-3)_2 \Delta^2 y_3 + \dots + (u-3)_n \Delta^n y_3,$$

u. s. w.

$$y_{\mu-1} + (u-\mu+1)_1 \Delta y_{\mu-1} + (u-\mu+1)_2 \Delta^2 y_{\mu-1} + \dots \\ \dots + (u-\mu+1)_n \Delta^n y_{\mu-1}.$$

Nun ist nach dem Obigen allgemein

$$Y_\mu = \Delta x_0 \int_0^\mu y \partial u,$$

nach einem bekannten Satze der Integralrechnung:

$$Y_\mu = \Delta x_0 \left\{ \int_0^1 y \partial u + \int_1^2 y \partial u + \int_2^3 y \partial u + \dots + \int_{\mu-1}^\mu y \partial u \right\},$$

man in die einzelnen  $\mu$  Integrale nach der Reihe für  $y$  die  $\mu$  Ausdrücke dieser Function einführen kann. Setzen wir überhaupt in dem Integrale

$$\int_{p-1}^p (u-p+1)_q \partial u$$

Grösse

$$u-p+1=v, \text{ also } \partial u = \partial v;$$

und überlegen, dass für  $u=p-1$ ,  $u=p$  respective  $v=0$ ,  $v=1$  ist; so erhalten wir auf der Stelle die Gleichung

$$\int_{p-1}^p (u-p+1)_q \partial u = \int_0^1 (v)_q \partial v,$$

oder, was natürlich Dasselbe ist:

$$\int_{p-1}^p (u-p+1)_q \partial u = \int_0^1 (u)_q \partial u.$$

Nach dem Obigen ist also

$$\begin{aligned} & \int_{p-1}^p y \partial u \\ &= y_{p-1} \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_{p-1} \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_{p-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots \\ & \dots + \Delta^n y_{p-1} \int_0^1 (u)_n \partial u, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
Y_{\mu} = & \Delta x_0 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_0 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots + \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_1 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_1 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_1 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots + \Delta^n y_1 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_2 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_2 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_2 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots + \Delta^n y_2 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& + y_3 \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_3 \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_3 \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots + \Delta^n y_3 \int_0^1 (u)_n \partial u \\
& \vdots \\
& + y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_0 \partial u + \Delta y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_1 \partial u + \Delta^2 y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u + \dots + \Delta^n y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_n \partial u
\end{aligned}$$

u. s. w.

woraus sich ferner sogleich die folgende Formel ergibt:

$$\begin{aligned}
Y_\mu = & \Delta x_0 \{ (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{\mu-1}) \int_0^1 (u)_0 du \\
& + (\Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_{\mu-1}) \int_0^1 (u)_1 du \\
& + (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \Delta^2 y_3 + \dots + \Delta^2 y_{\mu-1}) \int_0^1 (u)_2 du \\
& + (\Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \Delta^3 y_3 + \dots + \Delta^3 y_{\mu-1}) \int_0^1 (u)_3 du \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + (\Delta^n y_0 + \Delta^n y_1 + \Delta^n y_2 + \Delta^n y_3 + \dots + \Delta^n y_{\mu-1}) \int_0^1 (u)_n du \}
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
& \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \dots + \Delta y_{\mu-1} \\
& = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_\mu - y_{\mu-1}) \\
& = y_\mu - y_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \Delta^2 y_2 + \Delta^2 y_3 + \dots + \Delta^2 y_{\mu-1} \\
& = (\Delta y_1 - \Delta y_0) + (\Delta y_2 - \Delta y_1) + (\Delta y_3 - \Delta y_2) + \dots + (\Delta y_\mu - \Delta y_{\mu-1}) \\
& = \Delta y_\mu - \Delta y_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta^3 y_0 + \Delta^3 y_1 + \Delta^3 y_2 + \Delta^3 y_3 + \dots + \Delta^3 y_{\mu-1} \\
& = (\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0) + (\Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1) + (\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2) + \dots + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_{\mu-1}) \\
& = \Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Also ist



$$\begin{aligned}
 Y_\mu = \Delta x_0 \{ & y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{\mu-1} \\
 & + (y_\mu - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\
 & + (\Delta y_\mu - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\
 & + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\
 & \text{u. s. w.} \\
 & + (\Delta^{n-1} y_\mu - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u
 \end{aligned}
 \}$$

her Formel man, um die gesuchten Grössen

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_n$$

lten, nach und nach

$$\mu = 0, 1, 2, 3, 4, \dots n$$

muss. Für  $\mu = 0$  ist freilich die obige Formel eigentlich  
ehr anwendbar; man weiss aber aus dem Obigen, dass  
ist.

obige Formel muss nun aber noch so umgeformt werden,  
in zu der Berechnung der sämtlichen Grössen

$$Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, \dots Y_n$$

er gegebenen Grössen

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

r Differenzen, nicht auch der oben durch

$$y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, y_{n+4}, \dots$$

eten Grössen und deren Differenzen bedarf, wozu wir aber  
en folgenden Satz von den Binomialcoefficienten beweisen

## §. 11.

*Lehrsatz.*

Wenn  $x$  eine beliebige Grösse, ist, aber  $k$  und  $\mu$  positive ganze Zahlen bezeichnen, so ist immer

$$(x)_{\mu} + (k)_1(x)_{\mu+1} + (k)_2(x)_{\mu+2} + \dots + (k)_k(x)_{\mu+k} = (x+k)_{\mu+k}.$$

*Beweis.*

I. Für  $k=1$  ist

$$\begin{aligned} (x)_{\mu} + (1)_1(x)_{\mu+1} &= \frac{x(x-1)\dots(x-\mu+1)}{1.2.3\dots\mu} \\ &\quad + \frac{x(x-1)\dots(x-\mu+1)(x-\mu)}{1.2.3\dots(\mu+1)} \\ &= \frac{(x+1)x(x-1)\dots(x-\mu+1)}{1.2.3\dots(\mu+1)} = (x+1)_{\mu+1}. \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle  $\mu=0$  ist

$$(x)_0 + (1)_1(x)_1 = 1 + x = (x+1)_1.$$

Man sieht also, dass der Satz für jedes positive ganze  $\mu$  und  $k=1$  gilt.

II. Wir wollen nun annehmen, dass der Satz für jedes positive ganze  $\mu$  und  $k-1$  gelte, und wollen daraus abzuleiten suchen, dass er dann auch für jedes positive ganze  $\mu$  und  $k$  gelten muss, wodurch seine allgemeine Gültigkeit bewiesen sein wird.

Nach einem bekannten Satze von den Binomialcoefficienten ist:

$$(k)_1 = 1 + (k-1)_1,$$

$$(k)_2 = (k-1)_1 + (k-1)_2,$$

$$(k)_3 = (k-1)_2 + (k-1)_3,$$

u. s. w.

$$(k)_{k-1} = (k-1)_{k-2} + (k-1)_{k-1},$$

$$(k)_k = (k-1)_{k-1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} & (u)_\mu + (k)_1(u)_{\mu+1} + (k)_2(u)_{\mu+2} + \dots + (k)_k(u)_{\mu+k} \\ = & (u)_\mu + (k-1)_1(u)_{\mu+1} + (k-1)_2(u)_{\mu+2} + \dots + (k-1)_{k-1}(u)_{\mu+k-1} \\ & + (u)_{\mu+1} + (k-1)_1(u)_{\mu+2} + (k-1)_2(u)_{\mu+3} + \dots \\ & \dots + (k-1)_{k-1}(u)_{\mu+1} + (k-1), \end{aligned}$$

und da nun nach der Annahme der Satz für jedes  $\mu$ , folglich auch für  $\mu+1$ , und  $k-1$  gilt, so ist:

$$\begin{aligned} & (u)_\mu + (k)_1(u)_{\mu+1} + (k)_2(u)_{\mu+2} + \dots + (k)_k(u)_{\mu+k} \\ = & (u+k-1)_{\mu+k-1} + (u+k-1)_{\mu+k}, \end{aligned}$$

also nach einem bekannten Satze von den Binomialcoefficienten:

$$\begin{aligned} & (u)_\mu + (k)_1(u)_{\mu+1} + (k)_2(u)_{\mu+2} + \dots + (k)_k(u)_{\mu+k} \\ = & (u+k)_{\mu+k}, \end{aligned}$$

wie bewiesen werden sollte.

## §. 12.

In dem in §. 10. gefundenen Ausdrucke von  $Y_\mu$ , wo bekanntlich  $\mu$  nicht grösser als  $n$  ist, kommen ausser der bekannten Grösse  $\Delta x_0$  und den bestimmten Integralen

$$\int_0^1 (u)_1 \partial u, \int_0^1 (u)_2 \partial u, \int_0^1 (u)_3 \partial u, \dots, \int_0^1 (u)_n \partial u,$$

deren Werthe immer ohne Schwierigkeit berechnet werden können, die Grössen

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mu;$$

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \dots, \Delta^{n-1} y_0;$$

$$\Delta y_\mu, \Delta^2 y_\mu, \Delta^3 y_\mu, \Delta^4 y_\mu, \dots, \Delta^{n-1} y_\mu$$

vor. Die bei unserer Aufgabe eigentlich gegebenen Grössen sind in dem folgenden Schema enthalten:

$$\begin{array}{cccccccc}
y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{n-1} & y_n \\
\Delta y_0 & \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 & \dots & \Delta y_{n-1} & & \\
\Delta^2 y_0 & \Delta^2 y_1 & \Delta^2 y_2 & \dots & \Delta^2 y_{n-2} & & & \\
\Delta^3 y_0 & \Delta^3 y_1 & \dots & \Delta^3 y_{n-3} & & & & \\
\Delta^4 y_0 & \dots & \Delta^4 y_{n-4} & & & & & \\
& & \text{u. s. w.} & & & & & \\
& & \Delta^{n-1} y_0 & \Delta^{n-1} y_1 & & & & \\
& & & \Delta^n y_0 & & & & 
\end{array}$$

Weil  $\mu$  nicht grösser als  $n$  ist, so sind in diesem Schema offenbar die Grössen

$$\begin{array}{l}
y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mu; \\
\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \dots, \Delta^{n-1} y_0
\end{array}$$

jedenfalls enthalten und können aus demselben sämtlich entnommen werden. Was aber die Grössen

$$\Delta y_\mu, \Delta^2 y_\mu, \Delta^3 y_\mu, \Delta^4 y_\mu, \dots, \Delta^{n-1} y_\mu$$

betrifft, so sind dieselben unter der allgemeinen Form

$$\Delta^k y_\mu,$$

wo

$$0 < k \leq n-1$$

ist, enthalten; und weil nun in dem obigen Schema offenbar bloss die folgenden  $k$ ten Differenzen vorkommen:

$$\Delta^k y_0, \Delta^k y_1, \Delta^k y_2, \Delta^k y_3, \dots, \Delta^k y_{n-k};$$

so ist in dem obigen Schema der wirklich gegebenen Grössen die Grösse  $\Delta^k y_\mu$  enthalten oder nicht enthalten, je nachdem

$$\mu \leq n-k \text{ oder } \mu > n-k$$

ist. Hieraus ergibt sich, dass von den Grössen

$$\Delta y_\mu, \Delta^2 y_\mu, \Delta^3 y_\mu, \Delta^4 y_\mu, \dots, \Delta^{n-1} y_\mu$$

die Grössen

$$\Delta y_\mu, \Delta^2 y_\mu, \Delta^3 y_\mu, \Delta^4 y_\mu, \dots \Delta^{n-\mu} y_\mu$$

in dem obigen Schema der wirklich gegebenen Grössen enthalten, dagegen die Grössen

$$\Delta^{n-\mu+1} y_\mu, \Delta^{n-\mu+2} y_\mu, \Delta^{n-\mu+3} y_\mu, \dots \Delta^{n-1} y_\mu$$

in diesem Schema nicht enthalten sind. Die ersteren Grössen können daher aus dem obigen Schema unmittelbar entnommen werden, die letzteren müssen wir durch die in diesem Schema vorkommenden Grössen auszudrücken suchen, wozu wir jetzt übergehen wollen.

Zu dem Ende bemerken wir zuvörderst, dass, weil

$$y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, y_{n+4}, \dots$$

die Werthe einer ganzen rationalen algebraischen Function für

$$u = n+1, n+2, n+3, n+4, \dots$$

sind, welche für

$$u = 0, 1, 2, 3, 4, \dots n$$

respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält, die Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}, \dots$$

offenbar eine arithmetische Reihe der  $n$ ten Ordnung ist, deren  $n$ te Differenzen

$$\Delta^n y_0, \Delta^n y_1, \Delta^n y_2, \Delta^n y_3, \Delta^n y_4, \dots$$

unter einander gleich sind, und deren höhere Differenzen folglich sämtlich verschwinden.

Nun ist:

$$\Delta^{n-\mu+1} y_\mu = \Delta^{n-\mu+1} y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-1},$$

$$\Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-1} = \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-2} + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-2},$$

$$\Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-2} = \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4} y_{\mu-3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{n-1} y_2 = \Delta^{n-1} y_1 + \Delta^n y_1,$$

$$\Delta^n y_1 = \Delta^n y_0;$$

also, wenn man auf beiden Seiten addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\Delta^{n-\mu+1}y_\mu = \Delta^{n-\mu+1}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + \dots + \Delta^{n-1}y_1 + \Delta^n y_0.$$

In dieser Gleichung kann man, weil sich die Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \dots$$

auch als eine arithmetische Reihe der  $(n+1)$ sten Ordnung betrachten lässt, auch  $n+1$  für  $n$  setzen, wodurch man die Gleichung

$$\Delta^{n-\mu+2}y_\mu = \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + \dots + \Delta^n y_1 + \Delta^{n+1}y_0,$$

also, weil  $\Delta^{n+1}y_0 = 0$  ist, die Gleichung

$$\Delta^{n-\mu+2}y_\mu = \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-1} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + \dots + \Delta^n y_1$$

erhält; und wenn man nun auf die Differenzen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den oben entwickelten Ausdruck von  $\Delta^{n-\mu+1}y_\mu$  anwendet, indem man darin für  $\mu$  nach und nach  $\mu-1, \mu-2, \mu-3 \dots 1$  setzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \Delta^{n-\mu+2}y_\mu \\ &= \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \dots + \Delta^n y_0 \\ & \quad + \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \dots + \Delta^n y_0 \\ & \quad + \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \dots + \Delta^n y_0 \\ & \quad \text{u. s. w.} \\ & \quad \quad \quad + \Delta^n y_0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \Delta^{n-\mu+2}y_\mu \\ &= (1)_1 \Delta^{n-\mu+2}y_{\mu-2} + (2)_1 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + (3)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + \dots \\ & \quad \dots + (\mu-1)_1 \Delta^n y_0. \end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Gleichung  $n+1$  für  $n$  und bemerken, dass  $\Delta^{n+1}y_0 = 0$  ist, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \Delta^{n-\mu+3}y_\mu \\ &= (1)_1 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-2} + (2)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-3} + (3)_1 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-4} + \dots \\ & \quad \dots + (\mu-2)_1 \Delta^n y_1. \end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+3}y_\mu \\
&= (1)_1 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + (1)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + (1)_1 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + \dots + (1)_1 \Delta^n y_0 \\
&\quad + (2)_1 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + (2)_1 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + \dots + (2)_1 \Delta^n y_0 \\
&\quad + (3)_1 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + \dots + (3)_1 \Delta^n y_0 \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&\quad + (\mu-2)_1 \Delta^n y_0
\end{aligned}$$

also, wenn man addirt, nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+3}y_\mu \\
&= (2)_2 \Delta^{n-\mu+3}y_{\mu-3} + (3)_2 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + (4)_2 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + \dots \\
&\quad \dots + (\mu-1)_2 \Delta^n y_0.
\end{aligned}$$

Setzt man hierin  $n+1$  für  $n$  und bemerkt, dass  $\Delta^{n+1}y_0=0$  ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+4}y_\mu \\
&= (2)_2 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-3} + (3)_2 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-4} + (4)_2 \Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-5} + \dots \\
&\quad \dots + (\mu-2)_2 \Delta^n y_1,
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+4}y_\mu \\
&= (2)_2 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + (2)_2 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + (2)_2 \Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6} + \dots + (2)_2 \Delta^n y_0 \\
&\quad + (3)_2 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + (3)_2 \Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6} + \dots + (3)_2 \Delta^n y_0 \\
&\quad + (4)_2 \Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6} + \dots + (4)_2 \Delta^n y_0 \\
&\quad \text{u. s. w.} \\
&\quad + (\mu-2)_2 \Delta^n y_0
\end{aligned}$$

also, wenn man addirt, nach der Lehre von den figurirten Zahlen:

$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+4}y_\mu \\
&= (3)_3 \Delta^{n-\mu+4}y_{\mu-4} + (4)_3 \Delta^{n-\mu+5}y_{\mu-5} + (5)_3 \Delta^{n-\mu+6}y_{\mu-6} + \dots \\
&\quad \dots + (\mu-1)_3 \Delta^n y_0.
\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, erhellet hier schon mit völliger Deutlichkeit, und es ist daher allgemein:

$$\begin{aligned}\Delta^{n-\mu+\lambda}y_\mu = & (\lambda-1)\lambda_{-1}\Delta^{n-\mu+\lambda}y_{\mu-\lambda} \\ & + (\lambda)\lambda_{-1}\Delta^{n-\mu+\lambda+1}y_{\mu-\lambda-1} \\ & + (\lambda+1)\lambda_{-1}\Delta^{n-\mu+\lambda+2}y_{\mu-\lambda-2}\end{aligned}$$

u. s. w.

$$+ (\mu-1)\lambda_{-1}\Delta^n y_0.$$

Den in §. 10. gefundenen Ausdruck von  $Y_\mu$  wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, auf folgende Art darstellen:

$$\begin{aligned}Y_\mu = & \Delta x_0 \{ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{\mu-1} \\ & + (y_\mu - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u \\ & + (\Delta y_\mu - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\ & + (\Delta^2 y_\mu - \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\ & \text{u. s. w.} \\ & + (\Delta^{n-1} y_\mu - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u \\ & + (\Delta^n y_\mu - \Delta^n y_0) \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \end{aligned}$$

und haben nun nach den vorhergehenden Entwicklungen offenbar den folgenden Ausdruck:



$$\begin{aligned}
& \Delta^{n-\mu+1} y_{\mu} \int_0^1 (u)_{n-\mu+2} \partial u + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu} \int_0^1 (u)_{n-\mu+3} \partial u + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu} \int_0^1 (u)_{n-\mu+4} \partial u + \dots + \Delta^n y_{\mu} \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \\
& = \Delta^{n-\mu+1} y_{\mu-1} \int_0^1 (u)_{n-\mu+2} \partial u + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-2} \int_0^1 (u)_{n-\mu+3} \partial u + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} \int_0^1 (u)_{n-\mu+4} \partial u + \dots + \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n-\mu+2} \partial u \\
& \quad + \Delta^{n-\mu+2} y_{\mu-2} \int_0^1 (1)_1 (u)_{n-\mu+3} \partial u + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} \int_0^1 (2)_1 (u)_{n-\mu+3} \partial u + \dots + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_1 (u)_{n-\mu+3} \partial u \\
& \quad + \Delta^{n-\mu+3} y_{\mu-3} \int_0^1 (2)_2 (u)_{n-\mu+4} \partial u + \dots + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_2 (u)_{n-\mu+4} \partial u \\
& \quad + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_{\mu-2} (u)_{n+1} \partial u \\
& \quad + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_{\mu-2} (u)_{n+1} \partial u.
\end{aligned}$$

U. S. W.

$$\begin{aligned}
& + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_{\mu-2} (u)_{n+1} \partial u \\
& + \Delta^n y_0 \int_0^1 (\mu-1)_{\mu-1} (u)_{n+1} \partial u.
\end{aligned}$$

$$Y_n = \Delta x_0 (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})$$

$$+ (y_n - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u$$

$$+ \Delta y_{n-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$+ \Delta^2 y_{n-2} \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ \Delta^3 y_{n-3} \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

u. s. w.

$$+ \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber:

$$\int_0^1 (u)_1 \partial u = + \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = - \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 (u)_3 \partial u = + \frac{1}{24},$$

$$\int_0^1 (u)_4 \partial u = - \frac{19}{720},$$

$$\int_0^1 (u)_5 \partial u = + \frac{3}{160},$$

$$\int_0^1 (u)_6 \partial u = - \frac{863}{60480},$$

u. s. w.

und

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = - \frac{1}{12},$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \delta u = + \frac{1}{24},$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \delta u = - \frac{19}{720},$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \delta u = - \frac{3}{160},$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \delta u = - \frac{863}{60480},$$

u. s. w.

**Daher** kann man die Anfangsglieder des obigen Ausdrucks von  $Y_n$  auf folgende Art schreiben, wodurch man ganz denselben Ausdruck von  $Y_n$  erhält, welchen Laplace a. a. O. gegeben hat:

$$Y_n = \Delta x_0 \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right.$$

$$- \frac{1}{12} (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0)$$

$$- \frac{1}{24} (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0)$$

$$- \frac{19}{720} (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0)$$

$$- \frac{3}{160} (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0)$$

$$- \frac{863}{60480} (\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0)$$

u. s. w.

Dieser Laplace'sche Ausdruck von  $Y_n$  ist also als ein besonderer Fall unter unserm obigen allgemeinen Ausdrucke von  $Y_\mu$  enthalten.

### §. 13.

Aus dem vorhergehenden Paragraphen ergeben sich unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = + \int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+1)_2 \partial u = - \int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+2)_2 \partial u = + \int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+3)_2 \partial u = - \int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+4)_2 \partial u = + \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

u. s. w.

Bringen wir das in diesen Gleichungen auf der Stelle sich zeigende Gesetz auf einen allgemeinen analytischen Ausdruck, so erhalten wir, indem  $k$  eine positive ganze Zahl bezeichnet, die folgende Gleichung:

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u.$$

Es fragt sich nun, ob die Richtigkeit dieser Gleichung sich allgemein beweisen lässt. Ein Weg, diesen allgemeinen Beweis zu führen, scheint mir aber der folgende zu sein.

Aus dem Obigen wissen wir, dass wir im Vorhergehenden eigentlich die folgende Aufgabe aufgelöst haben:

Wir haben eine ganze rationale algebraische Function von  $x$  des  $(n+1)$ sten Grades

$$Y = C + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1}$$

von solcher Beschaffenheit gesucht, dass deren Differentialquotient

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n$$

für

$$x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

respective die Werthe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

erhält und haben zugleich die Constante  $C$  so bestimmt, dass  $Y$  für  $x=x_0$  verschwindet.

Wir wollen nun die Ordnung der Grössen

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots x_n;$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

umkehren, und wollen also eine ganze rationale algebraische Function von  $x$  des  $(n+1)$ sten Grades

$$p = \mathfrak{C} + \frac{1}{1} \mathfrak{A}_0 x + \frac{1}{2} \mathfrak{A}_1 x^2 + \frac{1}{3} \mathfrak{A}_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} \mathfrak{A}_n x^{n+1}$$

von solcher Beschaffenheit suchen, dass deren Differentialquotient

$$\eta = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 x^2 + \mathfrak{A}_3 x^3 + \dots + \mathfrak{A}_n x^n$$

für

$$x = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \dots x_0$$

respective die Werthe

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots y_0$$

erhält, indem wir zugleich die Constante  $\mathfrak{C}$  so bestimmen, dass  $p$  für  $x=x_n$  verschwindet.

Zuerst ergibt sich nun aus dem in §.3. bewiesenen Satze unmittelbar, dass die Functionen  $y$  und  $\eta$  identisch sein müssen, also

$$A_0 = \mathfrak{A}_0, A_1 = \mathfrak{A}_1, A_2 = \mathfrak{A}_2, \dots A_n = \mathfrak{A}_n;$$

folglich

$$Y = C + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1},$$

$$p = \mathfrak{C} + \frac{1}{1} A_0 x + \frac{1}{2} A_1 x^2 + \frac{1}{3} A_2 x^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x^{n+1}$$

ist. Daher haben wir jetzt wegen der aus dem Obigen bekannten Bestimmung der Constanten  $C$  und  $\mathfrak{C}$  die beiden folgenden Gleichungen:

$$0 = C + \frac{1}{1} A_0 x_0 + \frac{1}{2} A_1 x_0^2 + \frac{1}{3} A_2 x_0^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_0^{n+1},$$

$$0 = \epsilon + \frac{1}{1} A_0 x_n + \frac{1}{2} A_1 x_n^2 + \frac{1}{3} A_2 x_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_n^{n+1}.$$

Wegen der aus dem Obigen bekannten Bedeutung der Grössen  $Y_n$  und  $\varphi_n$  ist aber ferner:

$$Y_n = C + \frac{1}{1} A_0 x_n + \frac{1}{2} A_1 x_n^2 + \frac{1}{3} A_2 x_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_n^{n+1},$$

$$\varphi_n = \epsilon + \frac{1}{1} A_0 x_0 + \frac{1}{2} A_1 x_0^2 + \frac{1}{3} A_2 x_0^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_0^{n+1}.$$

Also ist nach den zwei vorhergehenden Gleichungen offenbar

$$Y_n = C - \epsilon, \quad \varphi_n = \epsilon - C;$$

woraus sich die Gleichung

$$Y_n + \varphi_n = 0$$

ergibt.

Bezeichnen wir die Differenzen für die Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

wie gewöhnlich durch  $\Delta$ , die Differenzen für die Reihe

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots, y_0$$

dagegen durch  $\nabla$ ; so haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$Y_n = \Delta x_0 \{ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}$$

$$+ (y_n - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u$$

$$+ \Delta y_{n-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$+ \Delta^2 y_{n-2} \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ \Delta^3 y_{n-3} \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

$$+ \Delta^4 y_{n-4} \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \Delta^4 y_0 \int_0^1 (u)_5 \partial u$$

u. s. w.

$$+ \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

und

$$Y_n = -\Delta x_0 \{ y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + \dots + y_1$$

$$+ (y_0 + y_n) \int_0^1 (u)_1 \partial u$$

$$+ \nabla y_1 \int_0^1 (u)_2 \partial u - \nabla y_n \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$+ \nabla^2 y_2 \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \nabla^2 y_n \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ \nabla^3 y_3 \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \nabla^3 y_n \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

$$+ \nabla^4 y_4 \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \nabla^4 y_n \int_0^1 (u)_5 \partial u$$

u. s. w.

$$+ \nabla^n y_n \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \nabla^n y_n \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

indem man sich auf der Stelle überzeugen wird, dass in letzterem Falle  $-\Delta x_0$  statt  $+\Delta x_0$  im ersteren Falle gesetzt werden muss.

Aus einer Vergleichung der beiden folgenden Schemata zur Berechnung der Differenzen:

$$0 = C + \frac{1}{1} A_0 x_0 + \frac{1}{2} A_1 x_0^2 + \frac{1}{3} A_2 x_0^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_0^{n+1},$$

$$0 = \zeta + \frac{1}{1} A_0 x_n + \frac{1}{2} A_1 x_n^2 + \frac{1}{3} A_2 x_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_n^{n+1}.$$

Wegen der aus dem Obigen bekannten Bedeutung der Grössen  $Y_n$  und  $\varphi_n$  ist aber ferner:

$$Y_n = C + \frac{1}{1} A_0 x_n + \frac{1}{2} A_1 x_n^2 + \frac{1}{3} A_2 x_n^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_n^{n+1},$$

$$\varphi_n = \zeta + \frac{1}{1} A_0 x_0 + \frac{1}{2} A_1 x_0^2 + \frac{1}{3} A_2 x_0^3 + \dots + \frac{1}{n+1} A_n x_0^{n+1}.$$

Also ist nach den zwei vorhergehenden Gleichungen offenbar

$$Y_n = C - \zeta, \quad \varphi_n = \zeta - C;$$

woraus sich die Gleichung

$$Y_n + \varphi_n = 0$$

ergibt.

Bezeichnen wir die Differenzen für die Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$$

wie gewöhnlich durch  $\Delta$ , die Differenzen für die Reihe

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, \dots, y_0$$

dagegen durch  $\nabla$ ; so haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar die beiden folgenden Gleichungen:



$$Y_n = \Delta x_0 \{ y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}$$

$$+ (y_n - y_0) \int_0^1 (u)_1 \partial u$$

$$+ \Delta y_{n-1} \int_0^1 (u)_2 \partial u - \Delta y_0 \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$+ \Delta^2 y_{n-2} \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \Delta^2 y_0 \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ \Delta^3 y_{n-3} \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \Delta^3 y_0 \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

$$+ \Delta^4 y_{n-4} \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \Delta^4 y_0 \int_0^1 (u)_5 \partial u$$

u. s. w.

$$+ \Delta^n y_0 \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \Delta^n y_0 \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

und

$$Y_n = -\Delta x_0 \{ y_n + y_{n-1} + y_{n-2} + y_{n-3} + \dots + y_1$$

$$+ (y_0 + y_n) \int_0^1 (u)_1 \partial u$$

$$+ \nabla y_1 \int_0^1 (u)_2 \partial u - \nabla y_n \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$+ \nabla^2 y_2 \int_0^1 (u+1)_3 \partial u - \nabla^2 y_n \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ \nabla^3 y_3 \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \nabla^3 y_n \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

$$+ \nabla^4 y_4 \int_0^1 (u+3)_5 \partial u - \nabla^4 y_n \int_0^1 (u)_5 \partial u$$

u. s. w.

$$+ \nabla^n y_n \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \nabla^n y_n \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

indem man sich auf der Stelle überzeugen wird, dass in letzterem Falle  $-\Delta x_0$  statt  $+\Delta x_0$  im erstenen Falle gesetzt werden muss.

Aus einer Vergleichung der beiden folgenden Schemata zur Berechnung der Differenzen:

Für ein ungerades  $n$  ist:

$$\begin{aligned}
 0 = \Delta x_0 \{ & (\Delta y_{n-1} + \Delta y_0) \left\{ \int_0^1 (u)_2 \partial u - \int_0^1 (u)_2 \partial u \right\} \\
 & + (\Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_0) \left\{ \int_0^1 (u+1)_3 \partial u + \int_0^1 (u)_3 \partial u \right\} \\
 & + (\Delta^3 y_{n-3} + \Delta^3 y_0) \left\{ \int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \int_0^1 (u)_4 \partial u \right\} \\
 & + (\Delta^4 y_{n-4} - \Delta^4 y_0) \left\{ \int_0^1 (u+3)_5 \partial u + \int_0^1 (u)_5 \partial u \right\} \\
 & + (\Delta^5 y_{n-5} + \Delta^5 y_0) \left\{ \int_0^1 (u+4)_6 \partial u - \int_0^1 (u)_6 \partial u \right\} \\
 & \quad \text{u. s. w.} \\
 & + (\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0) \left\{ \int_0^1 (u+n-2)_n \partial u + \int_0^1 (u)_n \partial u \right\} \\
 & + (\Delta^n y_0 + \Delta^n y_0) \left\{ \int_0^1 (u+n-1)_{n+1} \partial u - \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u \right\}
 \end{aligned}$$

Weil nun aber diese Gleichungen ganz unabhängig von besonderen Werthen von  $\Delta x_0$  und

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \dots, \Delta^n y_0;$$

$$\Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \Delta^3 y_{n-3}, \Delta^4 y_{n-4}, \dots, \Delta^n y_0$$

bestehen, vielmehr immer ihre Richtigkeit behalten, was auch diese Grössen für Werthe erhalten mögen, und weil ferner auch in den obigen Gleichungen  $n$  beliebig gross werden kann, so muss offenbar

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u - \int_0^1 (u)_2 \partial u = 0,$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \partial u + \int_0^1 (u)_3 \partial u = 0,$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \partial u - \int_0^1 (u)_4 \partial u = 0,$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \partial u + \int_0^1 (u)_5 \partial u = 0,$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \partial u - \int_0^1 (u)_6 \partial u = 0,$$

u. s. w. u. s. w.

oder

$$\int_0^1 (u)_2 \partial u = + \int_0^1 (u)_2 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+1)_3 \partial u = - \int_0^1 (u)_3 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+2)_4 \partial u = + \int_0^1 (u)_4 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+3)_5 \partial u = - \int_0^1 (u)_5 \partial u,$$

$$\int_0^1 (u+4)_6 \partial u = + \int_0^1 (u)_6 \partial u,$$

u. s. w. u. s. w.

folglich für jedes positive ganze  $k$

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u$$

sein.

Hiernach kann man nun, indem man zugleich wieder bemerkt, dass

$$\int_0^1 (u)_1 \partial u = \frac{1}{2}$$

ist, die oben für  $Y_n$  gefundene Formel allgemein auch auf folgende Art ausdrücken.

Für ein gerades  $n$  ist:

$$Y_n = \Delta x_0 \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right.$$

$$+ (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u$$

$$- (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u$$

$$+ (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) \int_0^1 (u)_4 \partial u$$

$$- (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) \int_0^1 (u)_5 \partial u$$

u. s. w.

$$+ (\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u$$

$$- (\Delta^n y_0 + \Delta^n y_0) \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u$$

Für ein ungerades  $n$  ist:

$$\begin{aligned}
 Y_n = \Delta x_0 \left\{ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n \right. \\
 + (\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) \int_0^1 (u)_2 \partial u \\
 - (\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) \int_0^1 (u)_3 \partial u \\
 + (\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) \int_0^1 (u)_4 \partial u \\
 - (\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) \int_0^1 (u)_5 \partial u \\
 \text{u. s. w.} \\
 - (\Delta^{n-1} y_1 + \Delta^{n-1} y_0) \int_0^1 (u)_n \partial u \\
 \left. + (\Delta^n y_0 - \Delta^n y_0) \int_0^1 (u)_{n+1} \partial u. \right\}
 \end{aligned}$$

Ich gestehe, dass es mir wünschenswerth scheint, noch einen andern Beweis der Gleichung

$$\int_0^1 (u+k)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u$$

zu besitzen, und werde vielleicht späterhin auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Setzt man  $u+k=v$ , also  $\partial u = \partial v$ , so ist für  $u=0$ ,  $u=1$  respective  $v=k$ ,  $v=k+1$ ; also ist

$$\int_k^{k+1} (v)_{k+2} \partial v = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u,$$

oder, wenn man, was hier offenbar verstattet ist, für  $v$  wieder  $u$  schreibt:

$$\int_k^{k+1} (u)_{k+2} \partial u = (-1)^k \int_0^1 (u)_{k+2} \partial u.$$

**XXIV.****Der Winter von 1853 in Berlin, im Vergleich mit den 16 vorhergehenden Wintern, besprochen**

von

**Herrn Professor Dr. Wolfers in Berlin.**

In zwei Aufsätzen, welche in dieser Zeitschrift abgedruckt sind, hatte ich mir die Aufgabe gestellt, die einzelnen Winter in Berlin nach der Vertheilung der hohen und niedern Temperatur mit einander zu vergleichen und zu untersuchen, ob in diesem Sinne sich Aehnlichkeiten zwischen ihnen ergeben werden. In dem zweiten Aufsätze, welcher dem 18. Bande einverleibt ist, hat sich unter andern Resultaten das folgende ergeben: In den strengen Wintern pflegen wenige, aber zusammenhängende Mengen niedriger Temperatur, in den nicht strengen viele, aber kleinere Mengen vorzukommen; in jenen finden demnach wenige, in diesen viele Uebergänge durch Null statt. Es ist die Aufgabe, aus dem ersten Theile eines Winters eine Aehnlichkeit mit dem entsprechenden Theile eines frühern Winters, in Bezug auf die vorhin angeführte Eigenschaft, zu entdecken, um daraus auf seinen weiteren Verlauf schliessen zu können. Wie weit mir diess in dem verflossenen Winter gelungen ist, will ich hier darstellen und lasse zunächst eine Zusammenstellung seines Verlaufes vom 1. November bis zum 31. März, der Tafel A. in meinem Aufsätze entsprechend, folgen.

Summe der Temperatur:			
+	Tage	—	Tage
70,6	12	1,1	2
158,9	38	3,5	2
78,6	25	0,1	1
24,3	13	2,8	3
1,6	6	68,5	23
8,3	8	53,6	16
0,5	1		
<b>Summe</b>	<b>342,8</b>	<b>103</b>	<b>47</b>

Bis Ende December fand eine auffallende Aehnlichkeit mit dem Anfange des Winters von 1842 statt, während nämlich in diesem folgende Werthe vorfanden:

	+ 78,1	18		
	130,4	42		
Summe	+ 205,5	60	- 0,8	1

beträgt in diesem Winter die Summe der ersten drei Abschnitte

+ 229,5	50	- 1,1	2.
---------	----	-------	----

Diese Uebereinstimmung, welche sich natürlich in der Curve gleich deutlich herausstellt, brachte mich bereits in der Mitte des Decembers auf die Vermuthung, dass dieser Winter dem von 1842 ähnlich werden, und ich sprach mich dahin unanfechtlich aus, dass wahrscheinlich eine mehrere Wochen anhaltende Kälteperiode eintreten würde. Meine Vermuthung schien lange Zeit sich nicht bewahrheiten zu wollen. Während im Winter von 1842 auf die angeführten 61 Tage sogleich die 27 Tage ununterbrochen anhaltende Kälteperiode eintrat, hatten wir in dem letzten Winter, nach den angeführten 52 Tagen nur 2 Tage Frost, worauf noch 39 Tage folgten, unter denen nur an einem einzigen Tage die mittlere Temperatur ganz wenig unter Null sank, ehe es sich zum anhaltenden Frost hinneigte. Auf diese Weise war der ganze Januar in diesem Winter wärmer, als in jedem der 16 vorhergehenden Winter. Gerade aber, diese anhaltende hohe Temperatur, welche nur am 19. Januar durch das bereits erwähnte verschwindend kleine Minus unterbrochen wurde, das Ausbleiben aller, nach meinen frühern Untersuchungen einem nicht strengen Winter eigenthümlichen, häufigen Temperaturwechsel liessen mich in meiner Vermuthung, dass uns noch anhaltende Kälte bevorstehe, nicht irre werden. Die obigen, der Tafel A. für 1853 entsprechenden Werthe zeigen, wie weit ich richtig vermuthet hatte.

In der Tafel B. meines Aufsatzes waren die Winter nach der den 150 Tagen vom 1. November bis 31. März zukommenden Summe der Temperatur geordnet, und in Betreff dieser Tafel will ich hier nur bemerken, dass der Winter von 1853 darin mit den Werthen

Ueberschuss der Temperatur:	im Mittel für 1 Tag:
+ 213,2	+ 1,42

seinen Platz zwischen den Wintern von 1844 und 1843 findet.

Die Tafel C. hingegen erlaube ich mir hier, mit Hinzufügung der beiden Winter von 1852 und 1853, wieder darzustellen:

Tafel C.

Winter.	Summe der Temperatur.				Ueberschuss der Temperatur.	Dauer in Tagen.	im Mittel für 1 Tag.
	+	Tage.	—	Tage.			
1852	217,2	89	46,0	42	+ 171,2	131	+ 1,31
1843	240,1	107	64,4	36	+ 175,7	148	+ 1,23
1853	271,7	90	120,6	47	+ 142,1	137	+ 1,11
1842	248,9	82	122,9	43	+ 126,0	128	+ 1,01
1851	165,3	68	69,9	47	+ 95,4	116	+ 0,83
1837	243,2	86	138,6	52	+ 104,6	138	+ 0,76
1840	293,6	99	177,7	56	+ 115,9	156	+ 0,75
1846	96,3	46	55,7	23	+ 40,6	69	+ 0,59
1849	187,3	59	159,6	37	+ 27,7	96	+ 0,29
1839	163,9	76	132,5	58	+ 31,4	134	+ 0,23
1844	116,7	58	93,2	45	+ 23,5	104	+ 0,23
1850	185,2	64	324,2	88	— 139,0	142	— 0,98
1847	86,9	39	265,5	77	— 178,6	116	— 1,54
1848	83,7	27	293,9	57	— 210,2	84	— 2,50
1838	49,1	42	382,1	69	— 333,0	111	— 3,00
1845	14,6	14	304,8	100	— 390,2	111	— 3,34
1841	31,2	17	352,1	78	— 320,9	96	— 3,38

Nach dieser Tafel erscheint der letzte Winter, im Ganzen betrachtet, dem von 1842 nahe ähnlich und mit ihm übereinstimmend. Wie damals trat auch jetzt nach anhaltender, durch wenige Tage unterbrochener hoher Temperatur eine anhaltende niedrige Temperatur ein; im letzten Winter aber um etwa einen Monat später als in dem von 1842.

In meinem vorigen Aufsätze war ich bei der Discussion stehen geblieben, deren Resultat in der Tafel C. durch Zahlen dargestellt ist. Schon damals habe ich bemerkt, dass diese Art der Discussion kein durchgehends befriedigendes Resultat liefere, jetzt erlaube ich mir, die Winter noch nach einer andern Weise zu ordnen, wozu ich die Data der Tafel C. entnehme. Unbedingt wird man nämlich zugeben, dass ein Winter um so strenger ist, je grösser die in der vierten Rubrik enthaltene Summe der negativen Temperatur ist; gibt man ausserdem zu, dass ein Winter um so strenger ist, je grösser die in der fünften Rubrik enthaltene Anzahl der Frosttage ist, so werden die Winter überhaupt, ihrer Strenge nach im direkten zusammengesetzten Verhältnisse dieser beiden Zahlen stehen. Indem ich daher der Tafel C. diese Werthe entnehme und für den Winter, welcher der am wenigsten strenge, die Verhältnisszahl 1,00000 annahm, erhielt ich die folgende Darstellung der einzelnen 17 Winter:

## I.

A partir d'un point donné, situé dans un plan quelconque, traçons  $m$  droites, qui divisent le plan autour de ce point en  $m$  angles égaux; et nommons  $\vartheta_1$  l'angle qu'une quelconque de ces droites forme avec un axe mené arbitrairement dans le même plan. Les angles qu'il y a entre les autres droites et cet axe seront alors

$$\vartheta_1 + \frac{2\pi}{m}, \vartheta_1 + 2\frac{2\pi}{m}, \dots, \vartheta_1 + (m-1)\frac{2\pi}{m},$$

que nous désignerons, pour abréger, par  $\vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_m$ . Elevons les cosinus de tous ces angles à une même puissance paire, représentée par  $2p$ ; et de toutes ces puissances cherchons la somme

$$\Sigma = \cos^{2p}\vartheta_1 + \cos^{2p}\vartheta_2 + \dots + \cos^{2p}\vartheta_m.$$

En développant la puissance  $\cos^{2p}\vartheta_1$  en une série, dont les termes contiennent les cosinus de multiples de l'angle  $\vartheta_1$ , on aura

$$\cos^{2p}\vartheta_1 = \frac{1}{2^{2p-1}} \left\{ \begin{aligned} &\cos 2p\vartheta_1 + \frac{2p}{1} \cos 2(p-1)\vartheta_1 + \dots \\ &\dots + \frac{2p(2p-1)\dots(p+2)}{1.2\dots(p-1)} \cos 2\vartheta_1 \end{aligned} \right\} + \frac{1}{2^{2p}} \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1.2\dots p},$$

et si l'on agit de la même manière à l'égard des autres puissances, on parviendra facilement à la somme de toutes ces expressions, qui sera

$$(1) \quad \Sigma = \frac{1}{2^{2p-1}} \left\{ \begin{aligned} &[\cos 2p\vartheta_1 + \cos 2p\vartheta_2 + \dots + \cos 2p\vartheta_{m-1} + \cos 2p\vartheta_m] \\ &+ \frac{2p}{1} [\cos 2(p-1)\vartheta_1 + \dots + \cos 2(p-1)\vartheta_m] \\ &+ \frac{2p(2p-1)}{1.2} [\cos 2(p-2)\vartheta_1 + \dots + \cos 2(p-2)\vartheta_m] \\ &\dots \\ &+ \frac{2p(2p-1)\dots(p+2)}{1.2\dots(p-1)} [\cos 2\vartheta_1 + \dots + \cos 2\vartheta_m] \end{aligned} \right\} + \frac{m}{2^{2p}} \frac{2p(2p-1)\dots(p+1)}{1.2\dots p}.$$

Maintenant, pour sommer la série

$$(2) \quad \cos 2p\vartheta_1 + \cos 2p\vartheta_2 + \dots + \cos 2p\vartheta_{m-1} + \cos 2p\vartheta_m,$$

employons une formule fournie par le calcul des différences finies



$$S \cdot \cos(a + bx) = \frac{\sin(a + bx + \frac{1}{2}b\Delta x) - \sin(a - \frac{1}{2}b\Delta x)}{2 \sin \frac{1}{2}b\Delta x}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(bx + b\Delta x) \cdot \cos \frac{1}{2}(bx + 2a)}{\sin \frac{1}{2}b\Delta x}$$

à l'aide de laquelle la somme des termes de cette série (2) revient à

$$(3) \quad S = \frac{\sin 2p\pi \cdot \cos 2(p\pi - \frac{p\pi}{m} + p\vartheta)}{\sin \frac{2p}{m}\pi}$$

Parceque  $p$  représente un nombre entier, le numérateur de cette fraction est toujours nul; le dénominateur au contraire ne disparaît que lorsque  $2p$  est égal à  $m$  ou à un multiple de  $m$ . Dans ces cas d'exception on parviendra à la valeur de la fraction

$\frac{0}{0}$  par la différentiation, au moyen de laquelle on trouvera  $m \cdot \cos 2p\vartheta$ ; ce qu'il faudrait nécessairement obtenir, puisqu'alors chaque terme de la série (2) sera égal à  $\cos 2p\vartheta$ . Mais si  $2p$  n'est pas égal à  $m$  ou à un multiple de  $m$ , la somme de la série (2) est toujours nulle, et par conséquent ne dépend point de la valeur de l'angle  $\vartheta_1$ .

En examinant de la même manière les autres séries qui se trouvent en (1), on reconnaîtra facilement qu'elles s'évanouissent toutes, à moins qu'un ou plusieurs des nombres  $2(p-1)$ ,  $2(p-2)$ , ..., ..., 4, 2 ne soient égaux à  $m$  ou à quelque multiple de  $m$ . Si nous excluons ces relations entre  $p$  et  $m$ , nous trouvons immédiatement

$$(4) \quad \Sigma = \frac{m}{2^{2p}} \frac{2p(2p-1)(2p-2) \dots (p+1)}{1.2.3 \dots p}$$

## II.

Concevons que par la normale à une surface quelconque soient menés  $m$  plans, dont chacun à partir de cette normale ne s'étend que dans un sens, et qui font entre eux des angles dièdres égaux; appelons  $\vartheta_1$  l'angle qu'un quelconque de ces plans forme avec le plan normal contenant la section principale dont la courbure est un maximum; et désignons les angles

$$\vartheta_1 + \frac{2\pi}{m}, \vartheta_1 + 2\frac{2\pi}{m}, \dots, \vartheta_1 + (m-1)\frac{2\pi}{m},$$

qui déterminent la position des autres plans, par  $\vartheta_2, \vartheta_3, \dots, \vartheta_m$ , de même que nous l'avons fait en I. Si nous nommons les rayons de courbure des sections normales, que ces  $m$  plans contiennent [ou plutôt dont ces plans ne contiennent que les moitiés], respectivement par  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ , et si nous représentons par  $n$  un nombre entier, la formule connue



fin qu'aucun des nombres 2, 4, ..., 2n ne soit égal à m. Si les conditions sont remplies, on parvient aux sommes des séries de la dernière équation en attribuant successive- dans la formule (4) les valeurs 1, 2, 3, ..., n-1, n; une

ou bien, après le développement des binômes,

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{q_1^n} + \dots + \frac{1}{q_m^n} \right) = \left\{ \frac{1}{R_2^n} + \frac{n}{1 \cdot 2^n} \frac{1}{R_2^{n-1}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^n} \frac{1}{R_2^{n-2}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \dots + \frac{n}{1 \cdot 2^{n-1}} \frac{(2n-2)(2n-3) \dots n}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{n-1} + \frac{1}{2^n} \frac{1 \cdot 2 \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^n \right\}$$

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{q_1^n} + \dots + \frac{1}{q_m^n} \right) = \left\{ \frac{1}{R_2^n} \left\{ 1 - \frac{n}{1 \cdot 2^n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 2^n} \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^n} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.} \right\} + \frac{n}{1 \cdot R_2^{n-1} R_1} \left\{ \frac{1 \cdot 2}{2^n} - \frac{n-1}{1 \cdot 2^n} \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 2^n} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{etc.} \right\} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{R_2^{n-2} R_1^2} \left\{ \frac{1 \cdot 4 \cdot 3}{2^n} - \frac{n-2}{1 \cdot 2^n} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \text{etc.} \right\} + \text{etc.} \right\}$$



fin qu'aucun des nombres 2, 4, ..., 2n ne soit égal à m. Les conditions sont remplies, on parvient aux sommes des séries de la dernière équation en attribuant successivement dans la formule (4) les valeurs 1, 2, 3, ..., n-1, n; onne

ou bien, après le développement des binomes,

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{q_1^n} + \dots + \frac{1}{q_m^n} \right) = \left\{ \frac{1}{R_2^n} + \frac{n}{1.2} \frac{1}{R_2^{n-1}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n(n-1)}{1.2.2^4} \frac{1}{R_2^{n-2}} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{n}{1.2^{n-1}} \frac{(2n-2)(2n-3)\dots n}{1.2\dots(n-1)} \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^{n-1} + \frac{1}{2^n} \frac{2n\dots(n+1)}{1.2\dots n} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^n \right\}$$

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{q_1^n} + \dots + \frac{1}{q_m^n} \right) = \left\{ \frac{1}{R_2^n} \left\{ 1 - \frac{n}{1.2^4} + \frac{n(n-1)}{1.2.2^4} \frac{1}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2^6} \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.} \right\} \right. \\ \left. + \frac{n}{1.2} \frac{1}{R_2^{n-1} R_1} \left\{ \frac{1}{2^4} - \frac{n-1}{1.2^4} \frac{1}{1.2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.2^6} \frac{1}{1.2.3} - \text{etc.} \right\} \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{1}{R_2^{n-2} R_1^2} \left\{ \frac{1}{2^4} \frac{1}{1.2} - \frac{n-2}{1.2^6} \frac{1}{1.2.3} + \dots \text{etc.} \right\} \right. \\ \left. + \text{etc.} \right\}$$

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que cette équation ne contient ni  $\theta$  ni  $m$  dans le second membre, lequel est toujours symétrique par rapport à  $R_2$  et  $R_1$ .

Comme la plus petite valeur qu'on puisse attribuer à  $n$  est l'unité, le nombre  $m$  ne peut être inférieur à 3, sans qu'il y ait  $2n=m$ . La substitution de cette valeur  $n=1$  réduit la dernière équation à

$$\frac{1}{m} \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_m} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ce que nous venons de démontrer peut évidemment s'énoncer ainsi :

Si, à partir de la normale en un point d'une surface quelconque, on mène  $m$  plans qui divisent l'espace autour de cette normale en  $m$  angles dièdres égaux, les puissances entières  $n$  des courbures des sections normales [ou plutôt des semi-sections normales] contenues dans ces plans fourniront une somme, dont la partie  $\frac{1}{m}$  ne dépend nullement du nombre de ces plans, ni de leur position par rapport aux sections principales; pourvu qu'il y ait  $n \leq m$ , si  $m$  est un nombre impair; et  $n < \frac{1}{2}m$ , si  $m$  est un nombre pair.

Si l'on a  $n=1$ , c'est à dire si ces  $m$  courbures ne sont prises qu'à la première puissance, la partie  $\frac{1}{m}$  de leur somme sera égale à la moitié de la somme des courbures principales. Dans ce cas le plus petit nombre de plans qu'il soit permis d'employer, est 3.

### III.

Supposons qu'on ait construit l'indicatrice appartenant à un point où la surface a ses deux courbures dirigées dans le même sens; et concevons qu'à partir du centre de cette ellipse on ait tracé  $m$  rayons vecteurs de manière qu'ils divisent l'aire de cette courbe en  $m$  secteurs égaux. Appelons ces rayons vecteurs  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ ; et désignons par  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  les rayons de courbure des sections normales, dont ces rayons vecteurs sont respectivement les tangentes. Si les rayons de courbure principaux de la surface au point que nous considérons sont représentés par  $R_1$  et  $R_2$ , l'aire de l'ellipse indicatrice sera  $\pi \sqrt{R_1 R_2}$ , et chaque secteur par conséquent en contiendra  $\frac{\pi}{m} \sqrt{R_1 R_2}$ . Or, l'aire du secteur situé entre les rayons vecteurs  $\xi_1$  et  $\xi_2$  peut aussi s'exprimer au moyen de l'intégrale

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{2} \xi^2 d\theta,$$

qui, à cause de la relation  $\zeta^2 = \rho$ , ne diffère pas de

$$(6) \quad \int_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_2} \frac{1}{2} \rho d\theta;$$

où  $\theta$  représente l'angle qui détermine la position des rayons vecteurs  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$  par rapport à l'axe polaire, que nous supposons ici tangente à la section principale dont le rayon de courbure est  $R_1$ . En vertu de cette définition il est permis de se servir de l'équation (5), qu'on peut aussi mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos 2\theta + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\},$$

et qui donne

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \left\{ \frac{2R_1 R_2}{(R_2 - R_1)\rho} - \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \right\};$$

d'où l'on tire en différentiant

$$d\theta = \frac{d\rho}{\rho \sqrt{[-R_1 R_2 + (R_2 + R_1)\rho - \rho^2]}} \times \frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2}.$$

En substituant cette valeur de  $d\theta$ , et en effectuant ensuite l'intégration de (6) entre les limites indiquées, on trouvera une expression de l'aire du secteur énoncé, qui, comparée à la première, fournira l'équation

$$\frac{1}{4} \left\{ \arcsin \frac{2\rho_2 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} - \arcsin \frac{2\rho_1 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \right\} \sqrt{R_1 R_2} = \frac{\pi}{m} \sqrt{R_1 R_2}$$

ou

$$\arcsin \frac{2\rho_2 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} = \arcsin \frac{2\rho_1 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} + \frac{4\pi}{m}.$$

Puisque les sinus d'arcs égaux sont égaux, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_2 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} &= \frac{2\rho_1 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \cos \frac{4\pi}{m} \\ &+ \sin \frac{4\pi}{m} \times \sqrt{1 - \left[ \frac{2\rho_1 - (R_2 + R_1)}{R_2 - R_1} \right]^2}; \end{aligned}$$

d'où il suit

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{1}{2}(R_2 + R_1) + [\rho_1 - \frac{1}{2}(R_2 + R_1)] \cos 2\frac{2\pi}{m} \\ &+ \sqrt{[-R_1 R_2 + (R_2 + R_1)\rho_1 - \rho_1^2]} \times \sin 2\frac{2\pi}{m}. \end{aligned}$$

Si l'on agit de la même manière à l'égard des secteurs qui

culièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne par M. Chasles etc. Bruxelles 1837.) knüpfen, vorbereiten und durch die Ueberzeugung desselben hervorgerufen, der reinen Geometrie in dieser Form der Bearbeitung eine freiere und erfolgreichere Entwicklung ihres Gegenstandes möglich zu machen und damit zugleich das Studium der Geometrie von Neuem zu beleben und deren Einfluss auf wissenschaftliche Geistesbildung allgemeiner zu machen. Der Mangel der üblichen geometrischen Methoden besteht nach der Ansicht des Verfassers darin, dass dieselben nicht ausschliesslich auf den wesentlichen Eigenschaften der räumlichen Gestalten beruhen, sondern zugleich durch die zufälligen Eigenthümlichkeiten der Figur bestimmt werden, oder, wenn dieses nicht der Fall ist und dieselben, wie z. B. das Princip der Continuität, allgemeiner und umfassender sind, in der unzureichenden Begründung des Principes dieser Methoden. Es sind daher in die geometrischen Entwicklungen allgemeinere Methoden einzuführen und deren Anwendung — in ähnlicher Weise, wie dieses in der analytischen Geometrie geschieht — durch Einführung der Vorzeichen und des Begriffs des Imaginären ausgedehnter und fruchtbarer zu machen.

Es soll in dem Folgenden — so weit es der Raum dieser Zeitschrift zulässt — das System der drei Theorien, welche der Verfasser als Grundlage seines geometrischen Beweisverfahrens in dem ersten Abschnitte seines Werkes aufstellt, wenigstens in den Umrissen mitgetheilt und einige interessante Anwendungen dieser allgemeineren geometrischen Methoden, welche in den drei übrigen Abschnitten des Werkes enthalten sind, angeführt werden.

Das System dieser drei Theorien kann als die Entwicklung eines und desselben Begriffes betrachtet werden, welcher eine bestimmte Function von Segmenten oder Winkeln umfasst und als das anharmonische Verhältniss von vier Punkten oder eines Strahlenbündels von vier Geraden (*rapport anharmonique de quatre points ou d'un faisceau de quatre droites*) bezeichnet wird.

#### A. Theorie des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten oder eines Strahlenbündels von vier Geraden.

Wenn vier Punkte  $a, b, c, d$  in gerader Linie liegen, so bezeichnet man als anharmonisches Verhältniss dieser Punkte eine Function von vier Segmenten, wie folgende:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$$

Diese Bezeichnung \*) ist von dem Verfasser bereits in seinem

---

\*) Diese Function von vier Segmenten ist von dem Verfasser aus dem Grunde als anharmonisches Verhältniss bezeichnet worden, weil in dem besonderen Falle, wo ihr Werth gleich  $-1$  ist, die vier Punkte gewöhnlich als solche betrachtet werden, die ein harmonisches Verhältniss bilden.



historischen Werke über geometrische Methoden mitgetheilt und von mehreren anderen Geometern beibehalten worden. Schon Pappus behandelt die Eigenschaft dieses Quotienten zweier Verhältnisse von Segmenten in mehreren auf einander folgenden Lehrsätzen, welche im 7. Buche als Hülfsätze für das leichtere Verständniss der Porismen des Euklid bewiesen sind. Der 129ste Satz sagt:

„Wenn vier Linien von einem Punkte ausgehen, so bilden sie auf einer Transversale, die willkürlich in derselben Ebene gezogen wird, vier Segmente, welche unter sich ein bestimmtes constantes Verhältniss haben, wie auch die Transversale gezogen werden mag.“ Es seien  $a, b, c, d$  die Punkte, in welchen die vier Geraden von einer beliebigen Transversale getroffen werden, und  $ac, ad, bc, bd$  die vier Segmente, so wird das Verhältniss  $\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}$  dasselbe bleiben, welches auch die Transversale sein mag.

Die darauf folgenden Sätze des Pappus sind entweder besondere Fälle oder das Umgekehrte dieses Satzes. Da der Satz von Pappus unter so vielen Formen wiederholt wird, so scheint er in den Porismen des Euklid von besonderem Nutzen gewesen zu sein; die späteren Geometer scheinen indess die Fruchtbarkeit dieses Lehrsatzes nicht beachtet zu haben. Denn obgleich Pascal in seiner Schrift über die Kegelschnitte, Desargues in seiner Praktik der Perspective, R. Simson in seiner Schrift über die Porismen denselben benutzten und Brianchon und Poncelet ihn anführen, so hat derselbe doch erst durch Moebius und Steiner, in der neuesten Zeit vorzugsweise durch Chasles, in dessen Entwicklung der Theorie der anharmonischen Function, eine höhere Bedeutung erhalten, welche der Verfasser in der Anwendung seiner Theorie auf geometrische Beweisführung auch praktisch durchführt. Die von Pappus nachgewiesene Eigenschaft der anharmonischen Function ist aber nur eine Folge einer anderen, welche Chasles in folgendem Lehrsatze ausdrückt:

„Wenn man von einem willkürlich gewählten Punkte nach vier in gerader Linie liegenden Punkten  $a, b, c, d$  Gerade zieht, so wird die anharmonische Function dieser Punkte genau dasselbe zu ihrem Werthe haben, was diese Function wird, wenn man statt der vier darin vorkommenden Segmente die Sinusse der diesen Segmenten gegenüberliegenden Winkel substituirt, oder: das anharmonische Verhältniss jener vier Geraden wird dem der vier Punkte gleich sein und auch dasselbe Zeichen haben.“ Es ist also

$$(1) \quad \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)},$$

wenn  $A, B, \dots$  die nach den Punkten  $a, b, \dots$  gehenden Geraden,  $(A, C), (A, D), \dots$  die von diesen Geraden gebildeten Winkel sind und sowohl die Segmente, als auch die Winkel stets in einem bestimmten, durch ihre Entstehung gegebenen Sinne aufgefasst und demgemäss durch Vorzeichen bezeichnet werden, so dass also stets

$$ab + ba = 0, \quad (A, B) + (B, A) = 0, \\ ab = -ba, \quad (A, B) = -(B, A).$$

Der Beweis für die numerische Gleichheit der beiden anharmonischen Functionen ergibt sich sofort durch Anwendung des Satzes von der Proportionalität der Seiten und der Sinusse der Gegenwinkel auf die Dreiecke, welchen die Segmente der anharmonischen Function angehören. Dass die beiden Functionen dasselbe Zeichen haben, geht, mit Rücksicht auf das Vorhergesagte, aus der Bezeichnung der Segmente und Winkel deutlich hervor.

Aus diesem Lehrsätze folgt nun sofort jene von Pappus angeführte Eigenschaft der anharmonischen Function von vier Segmenten. Die so einflussreiche, aus den Sinussen gebildete Function ist von Chasles als die anharmonische Function von vier Geraden oder des Strahlenbündels von vier Geraden bezeichnet worden.

Vier Punkte, welche auf einer geraden Linie liegen,  $a, b, c, d$  geben drei verschiedene anharmonische Verhältnisse, nämlich:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc},$$

deren gegenseitige Beziehungen folgende Eigenthümlichkeiten haben \*).

Das aus den drei zusammengehörigen anharmonischen Verhältnissen von vier Punkten zusammengesetzte Verhältniss ist = -1.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} \right) \cdot \left( \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} \right) \cdot \left( \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} \right) \\ &= (ac \cdot bd : ad \cdot bc) \cdot (ad \cdot bc : ab \cdot dc) \cdot (ab \cdot dc : ac \cdot db) \\ &= ac \cdot bd : ac \cdot db \\ &= -1. \end{aligned}$$

Wird eine Gerade in vier Punkten  $a, b, c, d$  von vier Geraden eines Strahlenbündels getroffen, eine zweite Transversale aber in den Punkten  $a', b', c', d'$ , so ist

$$\begin{aligned} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} &= \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}, & \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} &= \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} \\ &= \frac{a'c' \cdot b'd'}{a'd' \cdot b'c'} & &= \frac{a'b' \cdot c'd'}{a'd' \cdot c'b'}. \end{aligned}$$

Ist die zweite Transversale dem vierten nach  $d$  und  $d'$  gehenden Strahle parallel, so liegt der Punkt  $d'$  unendlich entfernt, und es ist in diesem Falle

\*) Die einfache geometrische Beweisführung möchte an dieser Stelle durch Einschaltung eines Hülfsatzes gefördert werden, welcher zugleich zu einem anderen Ausdrucke für das anharmonische Verhältniss Veranlassung giebt und so lautet: Jedes anharmonische Verhältniss von vier Segmenten ist dem Verhältniss des Rechteckes der beiden äusseren Segmente zu dem Rechteck aus den beiden inneren gleich:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac \cdot bd}{ad \cdot bc}.$$

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'}, \quad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = \frac{a'b'}{c'b'}.$$

Nun ist aber

$$a'c' + c'b' + b'a' = 0,$$

$$a'c' + b'a' = b'c',$$

$$\frac{a'c'}{b'c'} + \frac{a'b'}{c'b'} = 1;$$

folglich auch

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} = 1, \\ \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} + \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db} = 1, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} + \frac{ad}{ac} : \frac{bd}{bc} = 1. \end{cases}$$

Bezeichnet man die anharmonischen Verhältnisse wie folgt:

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = v_1, \quad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} = v_2, \quad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} = v_3,$$

so können die vorhergehenden drei Relationen auch folgende Form erhalten:

$$v_1 + \frac{1}{v_2} = 1, \quad v_2 + \frac{1}{v_3} = 1, \quad v_3 + \frac{1}{v_1} = 1.$$

Hieraus folgt noch eine andere merkwürdige Eigenschaft der sechs Segmente von vier Punkten  $a, b, c, d$ , die auf einer geraden Linie liegen. Es ist nämlich, mit Benutzung des früheren Hilfssatzes,

$$\frac{ac \cdot db}{ad \cdot cb} + \frac{ab \cdot cd}{ad \cdot cb} = 1$$

oder

$$(3) \quad ab \cdot cd + ac \cdot db + ad \cdot bc = 0.$$

Hieraus folgt, dass auch

$$\sin(A, B) \cdot \sin(C, D) + \sin(A, C) \cdot \sin(D, B) + \sin(A, D) \cdot \sin(B, C) = 0.$$

Geben die Strahlen von dem Mittelpunkte eines Kreises aus und schneiden die Peripherie desselben in den Punkten  $a, b, c, d$ , so lässt sich die letzte Relation auch so ausdrücken:

$$\sin ab \cdot \sin cd + \sin ac \cdot \sin db + \sin ad \cdot \sin bc = 0.$$

Ist nun  $\text{arc } bd$  positiv und gleich  $90^\circ$ , so ist

$$\sin db = -1, \quad \sin ad = \cos ab, \quad \sin cd = \cos cb;$$

folglich

$$\sin ac = \sin ab \cdot \cos cb + \sin bc \cdot \cos ab,$$

und da für die Folge der Punkte:  $a, b, c, d$

$$ac = ab + bc,$$

so ist

$$\sin(ab + bc) = \sin ab \cdot \cos bc + \sin bc \cdot \cos ab,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha.$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die übrigen hierher gehörigen trigonometrischen Formeln ableiten.

Sind die anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten, welche  $a, b, c, d$  und  $a', b', c', d'$  heissen, gleich, so ist

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{a'c'}{a'd'} : \frac{b'c'}{b'd'}.$$

Da aber  $v_1 + \frac{1}{v_2} = 1$  (2), so wird die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse zweier Systeme von vier Punkten auch noch auf folgende Weise ausgedrückt werden können:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} + \frac{a'b'}{a'd'} : \frac{c'b'}{c'd'} = 1, \\ \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} + \frac{a'c'}{a'b'} : \frac{d'c'}{d'b'} = 1, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} + \frac{a'd'}{a'c'} : \frac{b'd'}{b'c'} = 1. \end{array} \right.$$

## B. Theorie der homographischen Eintheilung.

Wenn zwei Gerade durch Punkte, welche einander einzeln entsprechen, in der Weise getheilt sind, dass das anharmonische Verhältniss von vier beliebigen Punkten der einen gleich ist dem anharmonischen Verhältniss der vier entsprechenden Punkte der anderen, so werden diese zwei Geraden als homographisch getheilte oder die Folgen ihrer Theilpunkte als zwei homographische Eintheilungen (*divisions homographiques*) bezeichnet.

Wenn zwei Strahlenbündel, deren Gerade einander einzeln

entsprechen, die Eigenschaft haben, dass vier beliebige Gerade des ersteren ein gleiches anharmonisches Verhältniss haben, wie dasjenige der vier entsprechenden Geraden des zweiten Bündels, so werden die beiden Strahlenbündel als homographische (faisceaux homographiques) bezeichnet. Zwei Linien  $L$  und  $L'$  sind also homographisch getheilt in den Punkten

$$\begin{aligned} a, b, c, d, e, \dots, \\ a', b', c', d', e', \dots, \end{aligned}$$

Wenn

$$\begin{aligned} \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc} &= \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{d'b'}{d'c'}, \\ \frac{ab}{ac} : \frac{eb}{ec} &= \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{e'b'}{e'c'}, \\ &\dots \end{aligned}$$

so dass also auch

$$\begin{aligned} \frac{db}{dc} : \frac{eb}{ec} &= \frac{d'b'}{d'c'} : \frac{e'b'}{e'c'}, \\ \frac{ec}{ed} : \frac{fc}{fd} &= \frac{e'c'}{e'd'} : \frac{f'c'}{f'd'}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Das Entsprechende gilt natürlich von homographischen Strahlenbündeln, so dass also jedes von zwei solchen Strahlenbündeln von einer beliebigen Transversalen immer in solchen Punkten durchschnitten wird, welche mit den entsprechenden der andern Transversale zwei homographische Eintheilungen bilden. Dasselbe wird aber natürlich auch von einem Strahlenbündel gelten, welches von zwei Transversalen getroffen wird, und der Durchschnittspunkt der beiden Transversalen, welcher zwei zusammenfallende homologe Punkte der beiden homographischen Eintheilungen darstellt, wird desshalb ein gemeinschaftlicher Punkt genannt. Wenn daher zwei Gerade in der Weise homographisch getheilt sind, dass ihr Durchschnittspunkt ein gemeinschaftlicher Punkt beider Eintheilungen ist, so werden die Geraden, welche die homologen Punkte der beiden Eintheilungen verbinden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

Zwei Strahlenbündel, deren Gerade sich paarweise in solchen Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen, sind homographische Strahlenbündel. Die Gerade, welche die Centra der beiden Strahlenbündel verbindet und zwei zusammenfallende homologe Strahlen der beiden Bündel darstellt, wird gemeinschaftlicher Strahl der beiden Bündel genannt. Wenn daher zwei homographische Strahlenbündel eine solche Lage haben, dass die ihre Centra verbindende Gerade ein gemeinschaftlicher Strahl der beiden Bündel ist, so werden die Durchschnittspunkte der übrigen homologen Strahlen der beiden Bündel auf einer geraden Linie liegen.

## Bedingungsgleichungen für homographische Eintheilungen.

Die Punkte  $a, b, c, m$  einer Geraden und die homologen einer zweiten  $a', b', c', m'$  bilden zwei homographische Eintheilungen, wenn

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'}$$

oder

$$\frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \left( \frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} \right).$$

Betrachten wir die homologen Punkte  $m$  und  $m'$  als variable auf jenen beiden Geraden, die übrigen aber nicht, und setzen den constanten Werth

$$\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'} = \lambda,$$

so erhalten wir aus der obigen Gleichung folgende Bedingungsgleichung zweier homographischen Eintheilungen, welche die Punkte  $m$  und  $m'$  auf den Geraden  $ab, a'b'$  bewirken:

$$(1) \quad \frac{am}{bm} = \lambda \cdot \frac{a'm'}{b'm'}.$$

Bezeichnen  $M$  und  $M'$  auf der einen und auf der andern Geraden die beiden Punkte, welche dem unendlich entfernten  $m'$  und dem unendlich entfernten  $m$  auf der zweiten und auf der ersten Geraden entsprechen, so gelten für die ersteren beiden Punkte folgende Gleichungen:

$$\frac{aM}{bM} = \lambda, \quad \frac{b'M'}{a'M'} = \lambda.$$

Ist  $\lambda = +1$ , so folgt aus der ersteren der beiden Gleichungen, dass  $M$ , welches dem unendlich entfernten  $m'$  als homologer Punkt entspricht, ebenfalls unendlich entfernt sein muss, und die Gleichung dieser besonderen homographischen Eintheilung:

$$(a) \quad \frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'}$$

drückt aus, dass die beiden Geraden in proportionale Stücke getheilt sind.

Aus der Form der Gleichung (1)

$$am = \frac{a'm'}{b'm'} \cdot \frac{bm}{bc} \left( ac : \frac{a'c'}{b'c'} \right)$$

folgt, dass für ein unendlich entferntes  $b$  auf der einen Geraden und für ein unendlich entferntes  $a'$  auf der anderen Geraden

$$am = \frac{\lambda}{b'm'}$$

wird. Bezeichnen wir mit  $B'$  und  $A$  die beiden Punkte, welche den unendlich entfernten  $b$  und  $a'$  entsprechen, so erhalten wir aus der vorhergehenden Gleichung folgende Bedingungsgleichung einer homographischen Eintheilung:

$$(2) \quad Am \cdot B'm' = \lambda,$$

in welcher  $A$  und  $B$  zwei feste Punkte auf zwei geraden Linien bezeichnen.

Vermittelt der früher erwähnten Ausdrücke für die Gleichheit anharmonischer Verhältnisse (4) lassen sich noch andere Bedingungsgleichungen für homographische Eintheilungen entwickeln. Sind nämlich die anharmonischen Verhältnisse der beiden Systeme von Punkten  $a, b, c, m$  und  $a', b', c', m'$  gleich, so ist

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} + \frac{c'm'}{b'm'} : \frac{c'a'}{b'a'} = 1,$$

und, wenn

$$\frac{bc}{ac} = \lambda, \quad \frac{b'a'}{c'a'} = \mu,$$

$$(3) \quad \lambda \cdot \frac{am}{bm} + \mu \cdot \frac{c'm'}{b'm'} = 1.$$

Sind die beiden Geraden ähnlich oder in proportionale Stücke getheilt, so sind die auf jeder Geraden in unendlicher Entfernung befindlichen Theilpunkte zugleich zwei homologe Punkte der homographischen Eintheilung, und nehmen wir als solche Punkte die beiden Punkte  $b$  und  $b'$  an, so erhalten wir folgende besondere Form der Gleichung (3):

$$(a) \quad \lambda \cdot am + \mu \cdot c'm' = 1.$$

Die Gleichung (1) lässt sich noch zur Entwicklung eines anderen Ausdrucks für zwei homographische Eintheilungen gebrauchen, wenn man derselben folgende Gestalt giebt:

$$am \cdot b'm' - \kappa \cdot bm \cdot a'm' = 0.$$

Da

$$bm = am - ab, \quad a'm' = b'm' - b'a',$$

so ergibt sich durch Einführung dieser Werthe in die vorhergehende Gleichung vermittelt einer leichten Umformung:

$$(4) \quad am \cdot b'm' + \lambda \cdot am + \mu \cdot b'm' + \nu = 0.$$

## Homographische Eintheilungen auf einer einzigen Geraden.

Die vorhergehende Gleichung (4) ist der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen auf zwei Geraden. Denken wir uns diese letzteren der Richtung nach und zugleich die Punkte  $a$  und  $b'$  beider Geraden zusammenfallend, so wird die Gleichung (4) auch in der neuen Form

$$am \cdot am' + \lambda \cdot am + \mu \cdot am' + \nu = 0$$

der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen sein. Durch die besondere Annahme, dass unter den Theilpunkten ein Punkt mit seinem homologen zusammenfalle, gewinnt die Gleichung endlich folgende Gestalt:

$$(5) \quad \overline{am^2} + (\lambda + \mu) \cdot am + \nu = 0,$$

woraus sich ergibt, dass es für zwei so gelegene homographische Eintheilungen zwei (reelle oder imaginäre) Punkte giebt, welche die Eigenschaft haben, dass jeder derselben, wenn er als einer der beiden Eintheilungen angehörig betrachtet wird, mit seinem homologen in der anderen zusammenfällt. Solche Punkte werden doppelte Punkte genannt.

Sind  $m$  und  $m'$  unendlich entfernt und die denselben in beiden Eintheilungen entsprechenden Punkte  $M'$  und  $M$ , so folgt im ersten Falle aus (4):

$$-b'M' = \lambda,$$

im zweiten:

$$-aM = \mu,$$

so dass

$$am \cdot b'm' - b'M' \cdot am - aM \cdot b'm' + \nu = 0.$$

Fällt  $m$  mit  $a$  zusammen und ist  $m'$  in diesem Falle der Punkt  $a'$ , so ist in Folge der letzten Gleichung:

$$\nu = aM \cdot b'a',$$

und unter den früheren Voraussetzungen die Form der Gleichung (5):

$$\overline{am^2} - (aM + aM')am + aM \cdot aa' = 0.$$

Die Summe der Entfernungen des Punktes  $a$  von den beiden doppelten Punkten ist also so gross als  $aM + aM'$ . Bezeichnen wir daher mit  $O$  den Mittelpunkt des von den beiden doppelten Punkten begrenzten Segments, so ist

$$aO = \frac{aM + aM'}{2},$$

und die Form der Gleichung (5) daher auch folgende:



$$am^2 - 2aO \cdot am + aM \cdot aa' = 0.$$

Fällt der Punkt  $a$  mit  $O$  zusammen und entspricht dem  $O$  in der zweiten Eintheilung der Punkt  $O'$ , so ist

$$Om^2 + OM \cdot OO' = 0,$$

und da für  $O$ , als Mittelpunkt zwischen  $M$  und  $M'$ ,

$$OM = -OM',$$

so ist

$$(6) \quad \begin{aligned} Om^2 &= OM' \cdot OO', \\ Om &= \pm \sqrt{OM' \cdot OO'}, \end{aligned}$$

woraus sich die Art und Weise und die Bedingungen der Möglichkeit der Construction der beiden doppelten Punkte von selbst ergeben.

Ähnliche Bedingungsgleichungen lassen sich für die Homographie zweier Strahlenbündel entwickeln; dahin gehören die folgenden:

$$(7) \quad \frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda \cdot \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')}.$$

$$(8) \quad \lambda \cdot \frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} + \mu \cdot \frac{\sin(C', M')}{\sin(B', M')} = 1.$$

### C. Theorie der Involution.

**Involution von sechs Punkten.** Wenn drei Systeme von je zwei zusammengehörigen Punkten, die in gerader Linie liegen, so beschaffen sind, dass das anharmonische Verhältniss von vier Punkten aus den drei Systemen gleich dem anharmonischen Verhältniss ihrer conjugirten Punkte ist, so sind diese sechs Punkte in Involution.

Wenn sechs Punkte in Involution sind, so ist das anharmonische Verhältniss von irgend welchen vier unter ihnen, die den drei Paaren conjugirter Punkte angehören, stets dem anharmonischen Verhältniss der conjugirten Punkte gleich.

Sind die drei Systeme  $a, a'; b, b'; c, c'$  und das anharmonische Verhältniss der vier Punkte  $a, b, c, c'$  gleich dem der conjugirten  $a', b', c', c$ , so wird auch das anharmonische Verhältniss jedes anderen Systemes von vier Punkten, welche jenen drei Paaren angehören, dem anharmonischen Verhältniss der conjugirten Punkte gleich sein.

Aus der durch die Voraussetzung gegebenen Gleichung

$$\frac{c'c}{c'a} : \frac{bc}{ba} = \frac{cc'}{ca'} : \frac{b'c'}{b'a'}$$

folgt zunächst, durch Einführung des Segmentes  $a'a$  für  $c'c$ , die Gleichung

$$\frac{a'e}{a'a} : \frac{ba}{ba} = \frac{ac'}{aa'} : \frac{b'c'}{b'a'}$$

und hieraus die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse der Punkte  $a, b, c, a'$  und der conjugirten  $a', b', c', a$ . Aus der Gleichung

$$\frac{ca}{cb} : \frac{c'a}{c'b} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{ca'}{cb'}$$

ergiebt sich durch einfache Umformung die Gleichung:

$$\frac{ca}{cb'} : \frac{c'a}{c'b'} = \frac{c'a'}{c'b} : \frac{ca'}{cb},$$

und hieraus die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse der Punkte  $a, b', c, c'$  und der conjugirten  $a', b, c' c$ . Auf die eine oder die andere Weise lassen sich auch die übrigen, durch die Voraussetzung gegebenen Gleichungen umformen.

Wenn drei Systeme von je zwei conjugirten Punkten:  $a, a'$ ;  $b, b'$ ;  $c, c'$  in Involution sind, so finden folgende sieben Gleichungen statt, und umgekehrt wird jede dieser Gleichungen die Involution bedingen und die sechs übrigen zur Folge haben:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'}, \\ \frac{bc \cdot bc'}{ba \cdot ba'} = \frac{b'c \cdot b'c'}{b'a \cdot b'a'}, \\ \frac{ca \cdot ca'}{cb \cdot cb'} = \frac{c'a \cdot c'a'}{c'b \cdot c'b'}, \\ ab' \cdot bc' \cdot ca' = -a'b \cdot b'c \cdot c'a, \\ ab' \cdot bc \cdot c'a' = -a'b \cdot b'c' \cdot ca, \\ ab \cdot b'c' \cdot ca' = -a'b' \cdot bc \cdot c'a, \\ ab \cdot b'c \cdot c'a' = -a'b' \cdot bc' \cdot ca. \end{array} \right.$$

Da jede dieser Gleichungen sich in eine Gleichung zweier anharmonischen Verhältnisse von vier Punkten der drei Systeme umformen lässt, z. B. die erste Gleichung in folgende:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{a'b}{a'c} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{ab'}{ac'},$$

so folgt hieraus die Richtigkeit des Lehrsatzes, die Umkehrung lässt sich aber leicht aus dem vorhergehenden Lehrsatz ableiten.

Sind die vier Punkte  $a, a'$ ;  $b, b'$  gegeben, so lässt sich, vermittelst der sieben vorhergehenden Gleichungen, für ein beliebig angenommenes  $c$  das zugehörige  $c'$  leicht bestimmen. Der Punkt

a daher auch in unendlicher Entfernung liegen oder mit seinem conjugirten  $c'$  zusammenfallen. In dem letzteren Falle gehen die sieben Gleichungen in folgende vier über:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{\overline{ae^2}}{\overline{a'e^2}}, \\ \frac{ba \cdot ba'}{b'a \cdot b'a'} = \frac{\overline{be^2}}{\overline{b'e^2}}, \\ ab' \cdot be \cdot ea' = -a'b \cdot b'e \cdot ea, \\ ab \cdot b'e \cdot ea' = -a'b' \cdot be \cdot ea; \end{array} \right.$$

wo  $e$  die beiden zusammenfallenden Punkte bezeichnet. Aus der Beschaffenheit dieser Gleichungen ergibt sich, dass es zwei Punkte  $e, f$  giebt, von welchen jeder die Eigenschaft hat, mit den Punkten  $a, a'; b, b'$  eine Involution zu bilden, in welcher Punkt  $e$  oder  $f$  jedesmal mit seinem conjugirten zusammenfällt. Da beide Punkte,  $e, f$  z. B., der ersten Gleichung genügen, so ist

$$\frac{\overline{ae^2}}{\overline{a'e^2}} = \frac{\overline{af^2}}{\overline{a'f^2}},$$

h

$$\text{und ebenso } \left\{ \begin{array}{l} \frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f}, \\ \frac{be}{b'e} = -\frac{bf}{b'f}, \end{array} \right. \quad (3)$$

es sich ergibt, dass die beiden Punkte, von welchen jeder mit einem conjugirten zusammenfällt, die beiden Segmente  $aa'$ , harmonisch theilen.

Ist der Punkt  $c$  in unendlicher Entfernung angenommen und der conjugirte Punkt desselben  $O$ , so erhalten die Gleichungen (1) die Gestalt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ab \cdot ab'}{a'b \cdot a'b'} = \frac{aO}{a'O}, \\ \frac{ba \cdot ba'}{b'a \cdot b'a'} = \frac{bO}{b'O}, \\ Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob', \\ \frac{Oa}{Ob} = \frac{ab'}{ba'}, \quad \frac{Oa'}{Ob'} = \frac{a'b}{b'a}, \\ \frac{Oa}{Ob'} = \frac{ab}{b'a'}, \quad \frac{Oa'}{Ob} = \frac{a'b'}{ba}; \end{array} \right.$$

welchen insbesondere die dritte eine weitere Beachtung verdient.

Wenn nämlich sechs Punkte  $a, a'; b, b'; c, c'$  in Involution sind und man zwei andere  $d, d'$  so nimmt, dass sie mit den ersten Paaren  $a, a'; b, b'$  eine Involution bilden, so lässt sich leicht durch Vergleichung der von der Involution bedingten gleichen anharmonischen Verhältnisse nachweisen, dass die Punkte  $d, d'$  auch mit dem dritten Paare und einem der ersteren eine Involution bilden werden.

Wenn daher jener Punkt  $O$  eine solche Lage hat, dass für sechs in Involution befindliche Punkte  $a, a'; b, b'; c, c'$

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob',$$

so ist offenbar auch

$$Ob \cdot Ob' = Oc \cdot Oc',$$

woraus sich der Satz ergibt:

Wenn drei Systeme von je zwei Punkten in Involution sind, so giebt es immer einen gewissen Punkt (Centralpunkt der Involution) von der Beschaffenheit, dass seine Entfernungen von je zwei conjugirten Punkten ein constantes Product geben.

Wenn zwei Segmente  $aa', bb'$  ein gemeinschaftliches Stück haben, so kann der zu diesen Paaren  $a, a'; b, b'$  gehörige Centralpunkt  $O$ , wenn wir die Gleichheit und die Vorzeichen der Producte  $Oa \cdot Oa'$  und  $Ob \cdot Ob'$  beachten, nothwendiger Weise nur auf diesem gemeinschaftlichen Stücke liegen, woraus sich die Construction des Punktes  $O$  sehr leicht ergibt.

Wenn man nämlich über zwei theilweise auf einanderliegenden Segmenten  $aa', bb'$ , als Durchmessern, zwei Kreise construirt, so wird ihre gemeinschaftliche Sehne stets durch den Centralpunkt  $O$  gehen.

Liegen die Segmente  $aa', bb'$  nicht theilweise auf einander, so kann man immer durch einen beliebigen und ausserhalb der Geraden befindlichen Punkt  $g$  zwei Kreisperipherien so construiren, dass die eine  $aa'$ , die andere  $bb'$  zur Sehne hat; die gemeinschaftliche Sehne  $gg'$  der Kreise durchschneidet alsdann  $ab$  im Centralpunkt  $O$ ; weil

$$Og \cdot Og' = Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob'.$$

Drei Kreise, die man über drei in Involution befindlichen Segmenten, als Durchmessern dieser Kreise, construirt, haben zwei gemeinschaftliche Durchschnittspunkte, welche in dem Falle, dass die Segmente nicht theilweise aufeinander fallen, imaginär sind. Die Kreise haben alsdann in dem letzteren Falle keine gemeinschaftliche Sehne, sondern eine gemeinschaftliche Chordale (axe radical).

Wenn drei Systeme von paarweise conjugirten Punkten  $a, a'; b, b'; c, c'$  in Involution sind und zwei Punkte  $e, f$  die Beschaffenheit haben, dass jeder derselben mit den beiden ersteren Paaren  $a, a'; b, b'$  eine Involution von fünf Punkten bildet, in welcher der Punkt  $e$  oder  $f$  mit seinem conjugirten zusammenfällt, so

werden die Punkte  $e$  und  $f$  diese Eigenschaft auch in Beziehung auf die Systeme  $b, b'$ ;  $c, c'$  besitzen. Dasselbe wird aber auch von der Eigenschaft der Punkte  $e$  und  $f$  gelten, welche durch die Gleichungen  $\frac{ae}{a'e} = -\frac{af}{a'f}$  etc. ausgedrückt ist. Hieraus ergibt sich leicht folgender Satz:

Wenn drei Systeme von paarweise conjugirten Punkten  $a, a'$ ;  $b, b'$ ;  $c, c'$  in Involution sind, so giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre) Punkte (doppelte Punkte der Involution), welche die drei Segmente  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  harmonisch theilen.

Diese Punkte befinden sich zu beiden Seiten des Centralpunktes in gleicher Entfernung von demselben, indem

$$Oa \cdot Oa' = Ob \cdot Ob' = \overline{Oe^2} = \overline{Of^2}.$$

Es ergibt sich zugleich aus der Gleichung

$$\overline{Oe^2} = Oa \cdot Oa',$$

dass die doppelten Punkte imaginär sind, wenn der Punkt  $O$  innerhalb der Segmente  $aa'$  und  $bb'$  liegt.

Die Beziehung, in welche ein beliebiger Punkt zu sechs in Involution befindlichen Punkten gebracht werden kann, führt zu andern wichtigen Eigenschaften der Involution. Sind nämlich  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  drei beliebige Segmente einer Geraden und  $\alpha, \beta, \gamma$  ihre Mittelpunkte,  $m$  und  $M$  zwei andere Punkte, so ist

$$\begin{aligned} ma &= Ma - Mm, \quad ma' = Ma' - Mm, \\ ma \cdot ma' &= Ma \cdot Ma' - 2 \cdot M\alpha \cdot Mm + \overline{Mm^2}, \\ mb \cdot mb' &= Mb \cdot Mb' - 2 \cdot M\beta \cdot Mm + \overline{Mm^2}, \\ mc \cdot mc' &= Mc \cdot Mc' - 2 \cdot M\gamma \cdot Mm + \overline{Mm^2}; \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} &ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta \\ &= Ma \cdot Ma' \cdot \beta\gamma + Mb \cdot Mb' \cdot \gamma\alpha + Mc \cdot Mc' \cdot \alpha\beta \\ &\quad - 2(M\alpha \cdot \beta\gamma + M\beta \cdot \gamma\alpha + M\gamma \cdot \alpha\beta) Mm + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) \overline{Mm^2}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach einem früheren Lehrsatz sowohl

$$M\alpha \cdot \beta\gamma + M\beta \cdot \gamma\alpha + M\gamma \cdot \alpha\beta = 0,$$

als auch

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 0,$$

folglich

$$\begin{aligned} &ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta \\ &= Ma \cdot Ma' \cdot \beta\gamma + Mb \cdot Mb' \cdot \gamma\alpha + Mc \cdot Mc' \cdot \alpha\beta. \end{aligned}$$

Ist daher  $M$  der Centralpunkt von sechs in Involution befindlichen Punkten  $a, a'; b, b'; c, c'$ , so ist

$$ma \cdot ma' \cdot \beta\gamma + mb \cdot mb' \cdot \gamma\alpha + mc \cdot mc' \cdot \alpha\beta = 0.$$

Fällt der Punkt  $m$  mit dem Punkte  $a$  zusammen, so ist

$$ab \cdot ab' \cdot \gamma\alpha + ac \cdot ac' \cdot \alpha\beta = 0,$$

folglich

$$\frac{ab \cdot ab'}{ac \cdot ac'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}; \quad \frac{a'b \cdot a'b'}{a'c \cdot a'c'} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$$

und ebenso:

$$\frac{bc \cdot bc'}{ba \cdot ba'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha}; \quad \frac{b'c \cdot b'c'}{b'a \cdot b'a'} = \frac{\beta\gamma}{\beta\alpha} \quad (5)$$

$$\frac{ca \cdot ca'}{cb \cdot cb'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}; \quad \frac{c'a \cdot c'a'}{c'b \cdot c'b'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}.$$

**Homographische Eintheilungen in Involution.** Für zwei Paare von Punkten  $a, a'; b, b'$  lassen sich unzählig viele andere Paare  $c, c'; d, d'; \dots$  bestimmen, welche mit jenen ersteren eine Involution bilden. Betrachten wir nun hierbei die Punkte  $a, b, a'$  und  $a', b', a$  als fest, die Punkte  $c, c'$  als variable und gleichsam die übrigen Paare beschreibend, so werden die Punkte  $c, c'$  offenbar zwei homographische Eintheilungen bilden. Aus der zugleich stattfindenden Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse  $a, b, a', c'$  und  $a', b', a, c$  wird aber folgen, dass der variable Punkt  $c'$ , man mag denselben als der einen oder der anderen Reihe der homographisch vertheilten Punkte angehörig betrachten, stets denselben homologen Punkt  $c$  hat. Solche homographische Eintheilungen werden als Eintheilungen in Involution bezeichnet.

Zwei homographische Eintheilungen auf derselben Geraden sind in Involution, wenn ein beliebiger Punkt auf dieser Geraden, den man als der einen und der anderen Eintheilung angehörig betrachtet, in beiden Fällen denselben homologen Punkt hat. Sind  $a, b, c$  und  $a', b', c'$  homologe Punkte der ersten und zweiten Eintheilung und entsprechen sich nach Voraussetzung

$$a, b, c, c',$$

$$a', b', c', c;$$

so sind die anharmonischen Verhältnisse dieser Punkte gleich und daher  $a, a'; b, b'; c, c'$  in Involution, so dass auch  $a, a', b, c$  und  $a', a, b', c'$  gleiche anharmonische Verhältnisse haben, und was von den Punkten  $c, c'$  galt, auch von den Punkten  $a, a'$  erwiesen ist.

Als Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen gilt folgende Gleichung (4):

$$am \cdot b'm' + \lambda \cdot am + \mu \cdot b'm' + \nu = 0,$$

und wenn  $m$  und  $m'$  unendlich entfernt und die ihnen entsprechenden Punkte  $M'$  und  $M$  sind,

$$-b'M' = \lambda, \quad -aM = \mu.$$

Nehmen wir nun an, dass von einem der in unendlicher Entfernung befindlichen Punkte das im Vorigen von dem Punkte  $c$  Gesagte gelte, so wird derselbe in beiden Eintheilungen denselben homologen Punkt haben müssen, woraus sich ergibt, dass in diesem Falle  $M'$  und  $M$  zusammenfallen. Dann ist aber

$$\lambda - \mu = aM - b'M = ab',$$

und wenn die beiden Eintheilungen einen gemeinschaftlichen Ausgangspunkt haben,

$$\lambda = \mu.$$

Die doppelten Punkte zweier homographischen Eintheilungen auf derselben Geraden stehen in einer merkwürdigen Beziehung zu gewissen Paaren ihrer Punkte. Sind nämlich  $a, b$ ;  $a', b'$  homologe Punkte zweier Eintheilungen und  $e, f$  die beiden doppelten Punkte, so sind die anharmonischen Verhältnisse der folgenden Systeme von vier Punkten gleich, nämlich von

$$a, b, e, f \text{ und } a', b', e, f.$$

Hieraus folgt, dass dasselbe auch von folgenden Systemen gilt:

$$a, b, e, f \text{ und } b', a', f, e,$$

oder dass  $ab'$ ,  $a'b$ ,  $ef$  drei in Involution befindliche Segmente sind. Die doppelten Punkte zweier homographischen Eintheilungen  $a, b, c, \dots$  und  $a', b', c', \dots$  bilden also stets mit zwei solchen Paaren von Punkten, wie  $a, b'$  und  $a', b$  eine Involution. Diese Eigenschaft der doppelten Punkte giebt uns ein Mittel an die Hand, dieselben zu construiren. Man construire zwei durch einen beliebigen Punkt  $g$  gehende Kreisperipherien, von denen die eine  $ab'$ , die andere  $a'b$  als Sehne in sich fasst, so werden sich dieselben noch in einem anderen Punkte  $g'$  schneiden. Durch denselben Punkt  $g$  construire man ferner ein anderes Paar von Kreisperipherien, von denen die eine  $ac'$ , die andere  $a'c$  zur Sehne hat, so werden dieselben sich in einem zweiten Punkte  $g''$  durchschneiden. Der Kreis, dessen Peripherie durch die Punkte  $g, g', g''$  geht, wird alsdann die Gerade in den gesuchten doppelten Punkten durchschneiden; denn beide Punkte werden sowohl mit  $a, b'$  und  $a', b$ , als auch mit  $a, c'$  und  $a', c$  in Involution sein.

Strahlenbündel von sechs Geraden in Involution sind solche, deren paarweise conjugirte Gerade die Eigenschaft haben, dass vier den drei Paaren angehörige Gerade ein gleiches anharmonisches Verhältniss, wie das der vier conjugirten Geraden haben. Solche Strahlenbündel werden von jeder Transversale in sechs Punkten geschnitten, die sich in Involution befinden, und alle Relationen, welche sich auf diese Durchschnittspunkte beziehen und durch Betrachtung der anharmonischen Verhältnisse dieser Punkte abgeleitet werden, gelten auch für die sechs Geraden z. B. folgende:

$$\frac{\sin(A, B) \cdot \sin(A, B')}{\sin(A, C) \cdot \sin(A, C')} = \frac{\sin(A', B) \cdot \sin(A', B')}{\sin(A', C) \cdot \sin(A', C')},$$

$$\sin(A, B) \cdot \sin(B', C) \cdot \sin(C', A') = - \sin(A', B') \cdot \sin(B, C') \cdot \sin(C, A).$$

Den doppelten Punkten der Involution eines Systemes von sechs Punkten entsprechen hier zwei doppelte Strahlen der Involution eines Strahlenbündels von sechs Geraden.

Eine ähnliche Analogie findet noch zwischen zwei homographischen Eintheilungen in Involution und zwei homographischen Strahlenbündeln in Involution statt.

### Anwendung der vorhergehenden Theorien.

Die übrigen drei Abschnitte des Werkes enthalten hauptsächlich die Bestimmung, die Eigenschaften der wichtigsten geometrischen Figuren mittelst der in dem ersten Abschnitte mitgetheilten Theorien zu entwickeln. Der zweite Abschnitt ist vorzugsweise den Eigenschaften der geradlinigen Figuren gewidmet und beginnt mit der Behandlung mehrerer geschichtlich merkwürdiger Aufgaben, welche den Gegenstand folgender Werke des Apollonius bilden: „de sectione determinata“, „de sectione rationis“ und „de sectione spatii.“

Die Aufgabe der sectio determinata ist folgende:

Wenn auf einer Geraden vier Punkte gegeben sind, einen fünften Punkt auf derselben so zu bestimmen, dass das Product seiner Entfernungen von zweien jener vier Punkte zu dem Producte seiner Entfernungen von den beiden anderen Punkten ein gegebenes Verhältniss hat.

Sind die gegebenen Punkte  $a, a'; b, b'$ ;  $\lambda$  die Verhältnisszahl, so ist ein Punkt  $m$  von der Beschaffenheit zu suchen, dass

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \lambda.$$

Aus der Theorie der Involution (1) geht sofort hervor, dass ausser einem Punkte  $m$ , welcher der Gleichung Genüge leistet, noch ein anderer  $m'$  von derselben Beschaffenheit vorhanden ist, nämlich derjenige, welcher, als der conjugirte des Punktes  $m$ , mit den beiden Systemen  $a, a'; b, b'$  eine Involution bildet.

Bezeichnen wir nun mit  $\mu, \alpha, \beta$  die Mittelpunkte der Segmente  $mm', aa', bb'$ , so ist

$$\frac{am \cdot a'm}{bm \cdot b'm} = \frac{\alpha\mu}{\beta\mu}, \quad (5)$$

folglich

$$\frac{\alpha\mu}{\beta\mu} = \lambda.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich der Mittelpunkt  $\mu$  und da-



mit zugleich die einfache Construction, welche auf die beiden Punkte  $m$  und  $m'$  führt.

Construirt man nämlich zwei Kreise, welche durch einen beliebigen Punkt  $g$  gehen und von denen der eine  $aa'$ , der andere  $bb'$  als Sehne enthält, ferner durch die beiden Durchschnittspunkte dieser Kreisperipherien  $g$  und  $g'$  einen dritten Kreis so, dass der Mittelpunkt desselben auf dem in  $\mu$  auf  $aa'$  errichteten Perpendikel liegt, so durchschneidet derselbe die Gerade in den gesuchten Punkten  $m$  und  $m'$  (4).

Aus der allgemeinen Form der Gleichung, welcher die Auflösung genügen muss, lassen sich leicht die besonderen Fälle der Aufgabe ableiten, und aus den Eigenschaften der Involution diejenigen Bedingungen, unter welchen  $m$  und  $m'$  imaginär werden. Wenn wir daher erwägen, wie schwierig die Lösungsmethode des Apollonius ist, die uns R. Simson in seiner Wiederherstellung des betreffenden Werkes von Apollonius mittheilt, so möchte schon dies Beispiel einer Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten geometrischen Principien hinreichen, die Allgemeinheit und Fruchtbarkeit derselben an den Tag zu legen.

#### Aufgabe der sectio rationis:

Wenn zwei Gerade  $AL$ ,  $BL$  gegeben sind, eine Transversale durch einen Punkt  $\rho$  so zu ziehen, dass die auf den beiden Geraden gebildeten Segmente, welche von den beiden festen Punkten dieser Geraden  $A$  und  $B$  ausgehen, ein gegebenes Verhältniss  $\lambda$  haben.

Nehmen wir auf beiden Geraden zwei zusammengehörige und variable Punkte  $a$  und  $a'$  an, deren Lage in Beziehung auf die Punkte  $A$  und  $B$  folgende Beziehung gestattet:

$$\frac{Aa}{Ba'} = \lambda,$$

so bilden diese Punkte eine homographische Eintheilung (1, a.), und die Aufgabe ist gelöst, wenn wir durch  $\rho$  eine Gerade so ziehen können, dass sie durch zwei homologe Punkte der Eintheilungen geht. Ziehen wir durch jeden Punkt  $a'$  und  $\rho$  Gerade, deren Durchschnittspunkte mit  $AL$  im Allgemeinen mit  $\alpha'$  bezeichnet werden sollen, so bilden  $\alpha'$  und  $a'$  ebenfalls zwei homographische Eintheilungen und desshalb auch  $a$  und  $\alpha'$ . Es folgt hieraus, dass nur diejenige Gerade  $a'\rho$  der Aufgabe genügt, welche einen der doppelten Punkte dieser letzten beiden Eintheilungen trifft und dass es zwei solche Gerade giebt. Nun sind zur Construction der beiden doppelten Punkte im Allgemeinen drei Paare zusammengehöriger Punkte der beiden Eintheilungen auf  $AL$  nöthig (6), es folgt also hieraus, dass man zur gesuchten Geraden  $a'\rho$  erst dann gelangt, wenn man, gleichsam versuchsweise, drei andere construirt hat, und dass diese geometrische Behandlung der Aufgabe, hinsichtlich der Methode, dem arithmetischen Verfahren der *positio falsi* nicht unähnlich ist.

In derselben Weise wird auch die Aufgabe der *sectio spatii* behandelt, deren Auflösung folgender allgemeinen Gleichung

$$Aa.Ba' = \lambda,$$

welche zugleich der Ausdruck zweier homographischen Eintheilungen ist (2), genügen muss.

Der Verfasser wendet diese Methode der Auflösung in der Folge noch auf einige andere geometrische Aufgaben an, deren Gegenstand von den erwähnten ganz verschieden ist, und zuletzt noch auf die Auflösung eines Systemes von Gleichungen des ersten oder des zweiten Grades.

Die Form eines Systemes von Gleichungen ersterer Art wird auf folgende specielle Form reducirt:

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

$$\lambda_1 y + \mu_1 z + \nu_1 = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\lambda_n v + \mu_n x + \nu_n = 0.$$

Nimmt man alsdann an, dass  $x, y, \dots$  die Entfernungen von eben so vielen Punkten  $X, Y, \dots$ , die auf derselben Geraden liegen, in Beziehung auf einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt, bezeichnen und dass an der Stelle von  $x$  in der letzten Gleichung sich  $x'$  befinde, so drückt jede der einzelnen Gleichungen, wenn  $X, Y$  als variabel betrachtet werden, zwei ähnliche (homographische) Eintheilungen aus (3, a.), und es folgt aus denselben, dass auch die Punkte  $X$  und  $X'$ , welcher letztere dem  $x'$  in der letzten Gleichung entspricht, solchen Eintheilungen angehören werden. Erwägt man nun, dass, nach der Form der obigen Gleichungen, von allen willkürlichen Werthen, welche  $x$  ertheilt werden mögen, nur derjenige der gesuchte ist, welcher bewirkt, dass für  $x'$  in der letzten Gleichung derselbe Werth erhalten wird, so wird hieraus, wenn wir auf die erwähnte geometrische Auffassung der Werthe  $x, y, \dots$  zurückgehen, folgen müssen, dass der doppelte Punkt der durch die letzte Gleichung ausgedrückten homographischen Eintheilung dem gesuchten Werthe von  $x$  angehört. Da nun zur Bestimmung derselben in diesem besonderen Falle zwei Systeme homologer Punkte nöthig sind, so werden zwei willkürliche Annahmen für  $x$  in der ersteren Gleichung zur Bestimmung des wahren Werthes von  $x$  genügen, und die geometrische Betrachtung führt ganz auf dasselbe Resultat, welches die Regel der *positio falsi* für die gesuchte Grösse angiebt.

### I. Vom Viereck.

In der Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften der geradlinigen Figuren beginnt der Verfasser mit dem Viereck und weist für dasselbe einen von Pappus in anderer Form (Buch 7, Satz 130) mitgetheilten und bewiesenen Lehrsatz nach, nämlich folgenden:

1. Jede Transversale, welche man in der Ebene eines Viereckes zieht, trifft die vier Seiten und die beiden Diagonalen in sechs Punkten, welche in Involution sind. Der Beweis ergiebt sich durch Betrachtung gleicher anharmonischer Verhältnisse.

In dem besonderen Falle, wo die Transversale durch die zwei Durchschnittspunkte jedes Paares der Gegenseiten geht, ist jeder dieser Punkte ein doppelter Punkt der Involution und desshalb theilen die Diagonalen in diesem Falle die Transversale in Beziehung auf jene Punkte harmonisch.

2. Der analoge Satz zu dem Vorhergehenden bezieht sich auf ein Strahlenbüschel von sechs Geraden, welche nach den vier Ecken und den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten eines Viereckes gehen.

3. Liegt das Centrum der Strahlen unendlich entfernt, so projeciren die Strahlen die sechs Punkte eines Viereckes so auf jede Gerade, dass die sechs Projectionen sich in Involution befinden.

4. In Folge dieses Satzes lässt sich auch die Eigenschaft der Involution auf die beiden Paare von Gegenecken eines Viereckes und auf die Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines Viereckes übertragen.

5. Denken wir uns die Transversale, welche die Seiten eines Viereckes durchschneidet, unendlich entfernt, so kommt die Richtung der Strahlen eines nach den Durchschnittspunkten der Transversale auslaufenden Strahlenbüschels mit der Richtung der Seiten und Diagonalen des Viereckes überein, so dass auch diese Seiten des Viereckes in Hinsicht auf ihre Winkel die Involutionsgleichungen von sechs Geraden zulassen.

## II. Vom Dreieck.

Die vorhergehenden Sätze lassen sich theilweise auf das Dreieck übertragen.

1. Werden die Seiten eines Dreieckes von einer Transversale durchschnitten, die Durchschnittspunkte der letzteren nach den Ecken  $A, B, C$ , welche den Seiten gegenüberliegen, mit  $a, b, c$  bezeichnet und das durch die Transversale abgeschnittene Viereck als ursprünglicher Figurentheil betrachtet, so lässt sich auf die ganze Figur Satz (1., 4.) übertragen und es ist

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = +1.$$

2. Zieht man durch jede Ecke eines Dreieckes eine beliebige Gerade nach der Gegenseite, so lässt sich durch Betrachtung der Dreiecke leicht nachweisen, dass jene Function der Segmente der analog gebildeten Function der Sinusse der an jenen Geraden gelegenen Winkel gleich ist. Unter Beibehaltung der angegebenen Bezeichnung ist also

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = \frac{\sin aAB}{\sin aAC} \cdot \frac{\sin bBC}{\sin bBA} \cdot \frac{\sin cCA}{\sin cCB},$$

so dass

$$\frac{\sin aAB \cdot \sin bBC \cdot \sin cCA}{\sin aAC \cdot \sin bBA \cdot \sin cCB} = +1$$

ist, wenn jene Geraden nach den drei Durchschnittspunkten einer Transversale gehen.

3. Drei von den Ecken eines Dreiecks in einen Punkt  $O$  zusammenlaufende Gerade bilden ebenfalls mit den Seiten des Dreiecks ein Viereck, welches einen bei  $O$  einspringenden Winkel hat. Für die Seiten und Diagonalen des Viereckes gelten also die Involutionsgleichungen, welche aus (I., 5.) folgen, und es ist mithin

$$(a) \quad \frac{\sin OAB \cdot \sin OBC \cdot \sin OCA}{\sin OAC \cdot \sin OBA \cdot \sin OCB} = -1;$$

Nun findet aber zwischen den Segmenten der Dreiecksseiten und den Sinussen ihrer Gegenwinkel jene Relation (II., 2.) statt, folglich gilt auch für diese Segmente folgende Involutionsgleichung:

$$(b) \quad \frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = -1.$$

4. Diese Lehrsätze erscheinen dann weiter als besondere Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, welcher sich auf zwei Dreiecke bezieht, von denen das eine dem anderen umschrieben ist. Ist nämlich  $abc$  das eine Dreieck und bezeichnet man die Ecken des ihm eingeschriebenen Dreiecks gleichmässig nach einer der zu beiden Seiten liegenden Ecken des um dasselbe beschriebenen Dreiecks mit  $A, B, C$ , so ist

$$\frac{Aa}{Ac} \cdot \frac{Bb}{Ba} \cdot \frac{Cc}{Cb} = - \frac{\sin aAC \cdot \sin bBA \cdot \sin cCB}{\sin aAB \cdot \sin bBC \cdot \sin cCA}.$$

Es folgt hierauf eine kurze Betrachtung der Homologie der Dreiecke, in welcher der Verfasser auf eine einfache Weise, vermittelt der Grundeigenschaften homographischer Strahlenbündel, die Bedingungen der Homologie und ihre gegenseitige Abhängigkeit nachweist.

Liegen nämlich zwei Dreiecke so, dass die ihre Spitzen verbindenden Geraden in einem Punkte zusammenlaufen, so durchschneiden sich ihre Seiten paarweise in Punkten, die auf einer einzigen Geraden liegen, und umgekehrt.

Der Satz lässt sich dadurch nachweisen, dass man zwei Ecken als Centra homographischer Strahlenbündel auffasst, je zwei von diesen Ecken auslaufende Seiten als Strahlen dieser Bündel und den Durchschnittspunkt des dritten Seitenpaares gleichzeitig als Durchschnittspunkt eines dritten Paares von Strahlen; es müssen dann die Durchschnittspunkte sämtlicher Seitenpaare, nach den in (B.) mitgetheilten Erläuterungen, in einer Geraden liegen.

Den Durchschnittspunkt jener Geraden, auf welchen die Ecken der Dreiecke liegen, bezeichnet der Verfasser nach Poncelet als Centrum der Homologie, die Gerade, welche die Durchschnittspunkte der Seitenpaare enthält, als Axe der Homologie. Zwei homothetische oder ähnliche und zugleich ähnlich gelegene Dreiecke sind solche, deren Axe der Homologie sich in unendlicher Entfernung befindet.

Aus den im Vorhergehenden mitgetheilten allgemeinen Lehrsätzen vom Dreieck, welche als Grundlage der Theorie der Transversalen angesehen werden können, leitet der Verfasser mehrere besondere Eigenschaften des Dreiecks ab, deren Abhängigkeit von jenen allgemeineren Eigenschaften nur in zwei Fällen a. d. O. nachgewiesen werden soll.

Schneidet eine Transversale die Seiten eines Dreiecks, im Sinne der früheren Bezeichnungsweise, in den Punkten  $a, b, c$ , und sind die conjugirten harmonischen Punkte der letzteren  $a', b', c'$ , so schneiden sich die drei Geraden, welche die letzteren Punkte beziehungsweise mit  $A, B, C$  verbinden, in einem Punkte.

Denn einmal ist

$$\frac{aB}{aC} \cdot \frac{bC}{bA} \cdot \frac{cA}{cB} = 1, \quad (\text{II., 1.})$$

ferner

$$\frac{aB}{aC} = -\frac{a'B}{a'C}, \quad \frac{bC}{bA} = -\frac{b'C}{b'A} \text{ etc.,}$$

folglich

$$\frac{a'B}{a'C} \cdot \frac{b'C}{b'A} \cdot \frac{c'A}{c'B} = -1,$$

und deshalb schneiden sich  $Aa', Bb', Cc'$  in einem Punkte. (II., 3. b.)

Liegt die Transversale unendlich entfernt, so bezeichnen die Punkte  $a', b', c'$ , wie sich aus der Betrachtung des harmonischen Verhältnisses leicht ergibt, die Mitten der drei Dreiecksseiten, woraus sich der bekannte Satz ergibt, dass die drei von den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten gehenden Geraden sich in einem Punkte schneiden.

Aus dem allgemeinen Lehrsatz, welcher die Relation zwischen den Sinussen der Winkel dreier von den Ecken eines Dreiecks in einen Punkt zusammenlaufender Geraden enthält, ergeben sich sofort folgende Lehrsätze:

In einem Dreiecke treffen die drei Geraden, welche die Winkel des Dreiecks halbiren, in einem Punkte zusammen; dasselbe gilt auch von den drei Geraden, welche die Supplemente zweier Winkel und den dritten Winkel des Dreiecks halbiren.

In einem Dreiecke treffen die drei Geraden, welche die Supplemente der Dreieckswinkel halbiren, die Gegenseiten in drei Punkten, die in einer Geraden liegen; dasselbe gilt von den drei Geraden, welche zwei Dreieckswinkel und das Supplement des dritten halbiren.

### III. Von den Vielecken.

Die Eigenschaften der Vielecke führen auf ähnliche Relationen, wie die am Dreieck entwickelten, so dass diese letzteren als besondere den folgenden allgemeineren unterordnen lassen.

1. Wenn eine Transversale, die in regelmässiger Aufeinanderfolge genommenen Seiten eines Vielecks  $ABC\dots$  in den in derselben Ordnung genommenen Punkten  $a, b, c\dots$  trifft, so findet stets folgende Relation statt:

$$\frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \cdot \frac{cC}{cD} \dots = +1.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass, wenn der Lehrsatz für ein Vieleck von  $n$  Seiten wahr ist, derselbe auch für ein Vieleck von  $n+1$  Seiten gelten muss, woraus, mit Rücksicht darauf, dass derselbe für das Dreieck erwiesen ist, seine allgemeine Gültigkeit folgt.

In ähnlicher Weise ergibt sich auch eine andere allgemeine Relation für das Vieleck, welche einer früheren am Dreieck nachgewiesenen entspricht, und folgender allgemeine Satz, in welchen sich beide zusammenfassen lassen:

Wenn man durch die Ecken eines Vieleckes  $ABCDEF$  beliebige Gerade  $Aa, Bb, \dots$  zieht, welche sich in den Ecken eines zweiten, dem ersteren eingeschriebenen Vieleckes von gleichviel Seiten schneiden, so findet stets folgende Relation statt, in welcher die Zeichen  $+$  und  $-$  sich auf eine gerade und ungerade Seitenanzahl beziehen:

$$\frac{Aa}{Af} \cdot \frac{Bb}{Ba} \dots \frac{Ff}{Fe} = \pm \frac{\sin aAF}{\sin aAB} \cdot \frac{\sin bBA}{\sin bBC} \dots \frac{\sin fFE}{\sin fFA}.$$

Aus den erwähnten Relationen leitet der Verfasser zwei andere Sätze ab, von denen der eine folgender ist:

Wenn man durch die Ecken eines Vieleckes  $ABC\dots$  beliebige Gerade  $Aa, Bb, Cc\dots$  zieht und eine Transversale, welche die Seiten des ersteren in den Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  und jene Geraden in den Punkten  $a, b, c, \dots$  trifft, so findet stets zwischen den Sinussen der Winkel, welche die Geraden mit den Seiten des Vielecks bilden, und den zwischen den Schenkeln dieser Winkel gelegenen Segmenten der Transversale folgende Relation statt:

$$\frac{\sin aAB}{\sin aAF} \cdot \frac{\sin bBC}{\sin bBA} \cdot \frac{\sin cCD}{\sin cCB} \dots = \pm \frac{a\alpha}{a\varphi} \cdot \frac{b\beta}{b\alpha} \cdot \frac{c\gamma}{c\beta} \dots$$

in welcher die Zeichen  $+$  und  $-$  sich auf eine gerade und ungerade Seitenanzahl des Vieleckes beziehen.

Der zweite Lehrsatz lässt sich so ausdrücken:

Nimmt man auf den Seiten eines Vieleckes  $ABC\dots$  die Punkte  $a, b, \dots$  und zieht von einem Punkte  $O$  Gerade nach den Ecken des Vielecks und nach jenen Punkten  $a, b, \dots$ , so findet zwischen den Sinussen der Winkel, welche diese Geraden unter sich bilden, und den bezüglichen Segmenten der Vielecksseiten folgende Relation statt:

$$\frac{\sin aOA}{\sin aOB} \cdot \frac{\sin bOB}{\sin bOC} \dots = \frac{aA}{aB} \cdot \frac{bB}{bC} \dots$$

#### IV. Gleichungen für die gerade Linie und den Punkt.

Sind  $EA$  und  $E'B'$  zwei feste Axen, auf welchen die Punkte  $A$  und  $B'$  willkürlich angenommen und die Punkte  $E$  und  $E'$  die Durchschnittspunkte sind, in welchen eine dritte Gerade  $PP'$  diese Axen trifft, so werden die Durchschnittspunkte zweier um die Pole  $P$  und  $P'$  sich drehender und jene beiden Axen schneidender Geraden eine gerade Linie beschreiben, wenn je zwei zusammengehörige Durchschnittspunkte auf den beiden Axen stets eine solche Lage zu den festen Punkten  $A$  und  $E$ ,  $B'$  und  $E'$  haben, dass

$$(1) \quad \alpha \frac{Am}{Em} + \beta \frac{B'm'}{E'm'} = \nu, \quad (\text{B., 3.})$$

ist und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  constante Coëfficienten sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen gehört also Gleichung (1) einer geraden Linie an.

Liegt die Gerade, auf welcher sich die Pole befinden, in unendlicher Entfernung, so dass die  $Pm$  unter sich und ebenso die  $P'm'$  parallel werden, so nimmt die Gleichung der geraden Linie folgende Gestalt an:

$$\alpha \cdot Am + \beta \cdot B'm' = \nu. \quad (\text{B., 3. a.})$$

Fallen die Punkte  $A$  und  $B'$  in einen Punkt  $O$ , den Durchschnittspunkt der Axen, zusammen, und ist jede der beiden Geraden, deren Durchschnittspunkte die gerade Linie erzeugen, einer der beiden Axen parallel, so stimmen die beiden Segmente  $Om$  und  $Om'$  durchaus mit den von Descartes in die analytische Geometrie eingeführten Coordinaten überein und es ergibt sich aus dem Vorigen, dass die Gleichung des ersten Grades:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \nu$$

die der geraden Linie ist.

Die Gleichung (1) lässt sich auch auf mehrere Axen  $AE$ ,  $BE'$ ,  $CE''$ , .... und auf mehrere Pole  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$ , ...., welche sich auf derselben Geraden befinden, ausdehnen, wodurch eine Gleichung von folgender Form entsteht:

$$(2) \quad \alpha \frac{Am}{Em} + \beta \frac{Bm'}{E'm'} + \gamma \frac{Cm''}{E''m''} + \dots = \nu,$$

in welcher alle Coëfficienten bis auf zwei willkürlich sein können. Die Gültigkeit der Relation ergibt sich, mit Rücksicht auf (1), daraus, dass dieselbe immer für  $n+1$  Axen gilt, wenn sie für  $n$  Axen erwiesen ist.

Nimmt man auf den Axen  $AE$ ,  $BE'$ , .... beziehungsweise die festen Punkte  $R$ ,  $R'$ , .... an und setzt an die Stelle der Coëfficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ , .... in der letzten Gleichung die Werthe

gehörige Gerade stets durch denselben Punkt  
daher die Gleichung (1) als Gleichung eines

$A$ ,  $SB$  parallel, so ist die Gleichung folgende:

$$\alpha \cdot Am + \beta \cdot Bm' = v.$$

rückt die Gleichung

$$\frac{Am}{Sm} = \mu \cdot \frac{Bm'}{Sm'}$$

, als zwei homologe Punkte, eine Lage der  
n Geraden bezeichnen und dass der Punkt  $q$   
3 liegt.

1) lässt sich, wie eine frühere, auch auf meh-  
... ausdehnen und nimmt dann folgende Form an:

$$\frac{Am}{Sm} + \beta \cdot \frac{Bm'}{Sm'} + \gamma \cdot \frac{Cm''}{Sm''} + \dots = v,$$

Koeffizienten, bis auf zwei, willkürlich genommen

man, dass alle solche Verhältnisse, wie  $\frac{Am}{Sm}$ ,  
er von den Punkten  $A, S$  auf die durch  $q$   
halten Senkrechten gleich sind und bezeichnet  
Punkte  $A, B, C, \dots S$  von der Geraden  $qm$   
so wird die vorige Gleichung folgende Form

$$+ \gamma \cdot p'' + \dots - v \cdot q = 0.$$

Gerade um einen Punkt bewegt, so  
in mehreren anderen beliebigen Punkten  
des ersten Grades, in welcher alle Coeff-  
zienten willkürlich genommen werden können.  
bewegliche Gerade in allen ihren Lagen  
ist gehen, wenn die Distanzen derselben von  
Punkten stets unter sich eine homogene Relation  
bilden.

Punkte  $A, B, C, \dots$  und die Constanten  $\alpha, \beta$ ,  
kann man eine beliebig grosse Menge solcher  
welche die Eigenschaft haben, dass die Summen  
z, welche ihre Distanzen von diesen Punkten  
zugehörigen Constanten  $\alpha, \beta, \dots$  bilden, gleich

von diesen Punkten auf eine Gerade Perpen-  
dunkte  $a, b, c, \dots$  sind, so lässt sich auf dieser  
Punkt  $q_1$  bestimmen, welcher folgender Glei-



$$\left(\alpha_1 : \frac{AR}{ER}\right), \left(\beta_1 : \frac{BR'}{E'R'}\right), \dots,$$

so erhält man für die letzte Gleichung:

$$\alpha_1 \left(\frac{Am}{Em} : \frac{AR}{ER}\right) + \beta_1 \left(\frac{Bm'}{E'm'} : \frac{BR'}{E'R'}\right) + \dots = v.$$

Aber auch die anharmonischen Verhältnisse der Gleichung lassen sich durch andere ersetzen, welche solchen Transversalen angehören, von denen jede durch denselben Punkt der dieser Gleichung angehörigen geraden Linie geht und ausserdem durch drei solche Strahlen, welche von einem Pole  $P$  nach den zugehörigen Punkten  $A, E, R$  gehen. Bezeichnet man ein solches neues anharmonisches Verhältniss, z. B. das mit dem ersten in der letzten Gleichung übereinstimmende, mit

$$\frac{aM}{eM} : \frac{a\rho}{e\rho},$$

so erhält die vorige Gleichung folgende Gestalt:

$$\alpha_1 \left(\frac{aM}{eM} : \frac{a\rho}{e\rho}\right) + \beta_1 \left(\frac{bM}{e'M} : \frac{b\rho'}{e'\rho'}\right) + \dots = v.$$

Nehmen wir nun die Punkte  $\rho, \rho', \dots$  als feste Pole und die Geraden  $A, B, \dots$ , auf welchen die Durchschnittspunkte der Transversalen  $a, b, \dots$  liegen, als gegeben an, ferner diejenige Gerade, auf welcher die Punkte  $e, e', \dots$  liegen, in unendlicher Entfernung, so erhält die Gleichung, mit Rücksicht darauf, dass jedes solches Verhältniss, wie  $\frac{aM}{a\rho}$ , gleich dem Verhältniss der von den Punkten  $M$  und  $\rho$  auf die Linie  $A$  gefällten Senkrechten ist, von welchen die letztere als constanter Werth in die Constanten der Gleichung aufgenommen werden kann, folgende Form:

$$\alpha \cdot p + \beta \cdot p' + \gamma \cdot p'' + \dots = v,$$

in welcher  $p, p', \dots$  die von einem Punkte der geraden Linie auf die Geraden  $A, B, \dots$  gefällten Senkrechten bezeichnen, und alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können.

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die von jedem Punkte einer geraden Linie auf feste Axen gefällten Senkrechten unter sich eine Relation vom ersten Grade bilden.

Gleichung für den Punkt. Wenn auf zwei Axen  $SA, SB$ , auf welchen  $A$  und  $B$  zwei feste Punkte bezeichnen, zwei variable und zusammengehörige Punkte  $m, m'$  folgender Relation:

$$(1) \quad \alpha \cdot \frac{Am}{Sm} + \beta \cdot \frac{Bm'}{Sm'} = v,$$

in welcher  $\alpha, \beta, v$  constant sind, Genüge leisten, so geht jede den

Punkten  $m, m'$  angehörige Gerade stets durch denselben Punkt ( $B$ ). Man kann daher die Gleichung (1) als Gleichung eines Punktes  $q$  ansehen.

Sind die Axen  $SA, SB$  parallel, so ist die Gleichung folgende:

$$\alpha \cdot Am + \beta \cdot Bm' = v.$$

Ist  $v = 0$ , so drückt die Gleichung

$$\frac{Am}{Sm} = \mu \cdot \frac{Bm'}{Sm'}$$

aus, dass  $A$  und  $B$ , als zwei homologe Punkte, eine Lage der durch  $q$  drehenden Geraden bezeichnen und dass der Punkt  $q$  auf der Geraden  $AB$  liegt.

Die Gleichung (1) lässt sich, wie eine frühere, auch auf mehrere Axen  $SA, SB, \dots$  ausdehnen und nimmt dann folgende Form an:

$$\alpha \cdot \frac{Am}{Sm} + \beta \cdot \frac{Bm'}{Sm'} + \gamma \cdot \frac{Cm''}{Sm''} + \dots = v,$$

in welcher alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können.

Erwägt man nun, dass alle solche Verhältnisse, wie  $\frac{Am}{Sm}$ , dem Verhältnisse der von den Punkten  $A, S$  auf die durch  $q$  gehende Gerade gefällten Senkrechten gleich sind und bezeichnet die Distanzen der Punkte  $A, B, C, \dots S$  von der Geraden  $qm$  mit  $p, p', p'', \dots q$ , so wird die vorige Gleichung folgende Form annehmen:

$$\alpha \cdot p + \beta \cdot p' + \gamma \cdot p'' + \dots - v \cdot q = 0.$$

Wenn sich also eine Gerade um einen Punkt bewegt, so bilden ihre Distanzen von mehreren anderen beliebigen Punkten eine homogene Relation des ersten Grades, in welcher alle Coëfficienten, bis auf zwei, willkürlich genommen werden können. Umgekehrt wird eine bewegliche Gerade in allen ihren Lagen durch denselben Punkt gehen, wenn die Distanzen derselben von mehreren festen Punkten stets unter sich eine homogene Relation des ersten Grades bilden.

Sind mehrere Punkte  $A, B, C, \dots$  und die Constanten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  gegeben, so kann man eine beliebig grosse Menge solcher Geraden ziehen, welche die Eigenschaft haben, dass die Summen derjenigen Producte, welche ihre Distanzen von diesen Punkten  $A, B, \dots$  mit den zugehörigen Constanten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bilden, gleich Null sind.

Denn fällt man von diesen Punkten auf eine Gerade Perpendikel, deren Fusspunkte  $a, b, c, \dots$  sind, so lässt sich auf dieser Geraden immer ein Punkt  $q_1$  bestimmen, welcher folgender Gleichung genügt:

$$\alpha \cdot a p_1 + \beta \cdot b p_1 + \gamma \cdot c p_1 + \dots = 0 \text{ *)}.$$

Zieht man nun durch den Punkt  $p_1$  eine mit jenen Perpendikeln parallele Linie, so wird für diese gerade Linie offenbar die Gleichung gelten:

$$\alpha \cdot p + \beta \cdot p' + \gamma \cdot p'' + \dots = 0,$$

in welcher  $p, p', \dots$  die Distanzen der Geraden von den Punkten  $A, B, \dots$  bezeichnen. Es folgt dann aus dem vorigen Satze zugleich, dass alle auf diese Weise bestimmten Linien einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt  $q$  haben werden.

Sind also mehrere beliebige Punkte  $A, B, C, \dots$  und die Coefficienten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  gegeben, so giebt es immer einen gewissen Punkt  $q$  von der Beschaffenheit, dass, wenn man durch diesen Punkt eine beliebige Gerade zieht, die Summe der Producte, welche man aus ihren Distanzen von jenen Punkten  $A, B, \dots$  und den zugehörigen Constanten  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bilden kann, immer gleich Null ist.

Sind die Punkte  $A, B, \dots$  materielle Punkte, deren Massen durch die Constanten  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet werden, so ist  $q$  der Schwerpunkt dieses Systems von Punkten.

Projicirt man ein System solcher Punkte  $A, B, \dots$  und den Schwerpunkt  $q$  durch parallele Gerade auf eine andere Gerade, und sind die Projectionen  $a, b, \dots, q_1$ , so gilt für die Abstände der Punkte  $a, b, \dots$  von  $q_1$  offenbar die Gleichung

$$\alpha \cdot a q_1 + \beta \cdot b q_1 + \gamma \cdot c q_1 + \dots = 0,$$

durch welche sich  $q_1$  als Schwerpunkt der Projectionen von jenen Punkten  $A, B, \dots$  zu erkennen giebt, und zugleich ein Verfahren, den Schwerpunkt eines Systems von Punkten  $A, B, \dots$  dadurch zu finden, dass man diese Punkte auf zwei Gerade projicirt und die Schwerpunkte der erhaltenen Projectionen bestimmt. Die beiden so erhaltenen Punkte sind die Projectionen des gesuchten Schwerpunktes.

\*) Die in obiger Gleichung enthaltene Behauptung möchte sich wohl am einfachsten aus folgender Gleichung ableiten lassen, deren Richtigkeit sich von selbst versteht:

$$\alpha \cdot (a p_1 + p_1 a) + \beta \cdot (b p_1 + p_1 a + a b) + \gamma \cdot (c p_1 + p_1 a + a c) + \dots = 0,$$

oder

$$\alpha \cdot a p_1 + \beta \cdot b p_1 + \gamma \cdot c p_1 + \dots + \beta \cdot a b + \gamma \cdot a c + \dots + (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \cdot p_1 a = 0,$$

so dass für

$$\alpha \cdot a p_1 + \beta \cdot b p_1 + \gamma \cdot c p_1 + \dots = 0$$

sich von selbst ergibt:

$$\beta \cdot a b + \gamma \cdot a c + \dots = (\alpha + \beta + \gamma + \dots) \cdot a p_1.$$

## XXVII.

**Beweis des Lehmus'schen Satzes:**  
**„Wenn die Geraden, die die zwei Winkel eines Dreiecks halbiren und die gegenüberliegenden Seiten schneiden, bis zu diesen Durchschnitten gleich sind und gleichartig liegen, so sind die beiden halbirten Winkel sich gleich.“**

Von

Herrn Hofrath Dr. Clausen zu Dorpat.

Die Beweise dieses Satzes, der vor etwa 10 Jahren aufgestellt wurde, sind so mannichfaltig und von so Vielen versucht, dass sie fast eine eigene kleine Literatur bilden, ähnlich denen des Pythagoräischen Lehrsatzes und der Theorie der Parallelinien. Noch neulich ist im letzten November-Heft des „Philosophical Magazine“ von vielen Beweisen dieses Satzes die Rede, die vor Kurzem in England als ganz neu aufgestellt wurden. Es ist daher nicht leicht möglich, alle Beweise desselben zu kennen, weshalb ich eine billige Entschuldigung hoffe, falls ich schon Bekanntes wiederholen sollte.

Es seien die Winkel  $DAB$  und  $CBA$  (Taf. IV. Fig. 1.) durch die Geraden  $AC$  und  $BD$  halbirt, der Durchschnitt dieser beiden Geraden sei  $G$ . Nach der Aussage des Satzes ist

$$AG + GC = BG + GD;$$

also

$$AG - GD = BG - GC.$$

Hinfolglich ist immer gleichzeitig  $AG$  grösser als  $GD$  und  $BG$  grösser als  $GC$ ; oder  $AG$  kleiner als  $GD$  und  $BG$  kleiner als  $GC$ .

Erster Fall. Wenn  $AG > GD$ .

Sei  $GF = GD$ ,  $GE = GC$ . Zieht man  $DF$  und  $CE$ , so entstehen zwei gleichschenkelichte Dreiecke  $FGD$  und  $EGC$ , die gleiche Scheitelwinkel in  $G$  haben und also auch gleiche Winkel an der Grundlinie. Es ist also auch Winkel  $AFD =$  Winkel  $BEC$ .

Gesetzt nun, die Winkel  $DAB$  und  $CBA$  wären nicht gleich, sondern Winkel  $CBA >$  Winkel  $DAB$ ; also auch die Halften, Winkel  $DBA >$  Winkel  $CAB$ . In diesem Falle wäre  $AG > GB$ , und also, da  $AF = AG - GD = BG - GC = BE$ , wäre auch  $FG > GE$ . Mithin, da beide Dreiecke  $FGD$  und  $EGC$  ähnlich sind:  $FD > CE$ . Es sei  $FH = EC$ , dann ist in den Dreiecken  $HFA$  und  $CEB$ :  $AF = BE$ ,  $FH = EC$ , Winkel  $AFD =$  Winkel  $BEC$ , also beide Dreiecke gleich und Winkel  $HAF =$  Winkel  $CBE$ . Demnach Winkel  $DAF >$  Winkel  $CBE$ , und also auch Winkel  $DAB >$  Winkel  $CBA$ , welches unserer Annahme widerspricht. Es muss also Winkel  $DAB =$  Winkel  $CBA$  sein.

Zweiter Fall. Wenn  $AG \leq GD$ .

Es sei also (Taf. IV. Fig. 2.) Winkel  $DAC =$  Winkel  $CAB$ , Winkel  $CBD =$  Winkel  $DBA$  und  $AC = BD$ . Die Winkel  $DBC$  und  $CAD$  sind immer spitz, weil jeder doppelt genommen kleiner als zwei Rechte ist. Ebenfalls da  $DG$  nicht kleiner als  $AG$  und  $CG$  nicht kleiner als  $BG$ , so ist der Winkel  $GDA$  nicht grösser als  $GAD$  und der Winkel  $GCB$  nicht grösser als  $GBC$ , mithin beide spitze Winkel. Die Senkrechten  $GJ$  auf  $DA$  und  $GK$  auf  $BC$  fallen also, jene zwischen  $A$  und  $D$ , und diese zwischen  $B$  und  $C$ . Es sei  $GH$  senkrecht auf  $AB$ , so ist, weil Winkel  $GBH =$  Winkel  $GBK$ ,  $GH = GK$ . Ebenso, weil Winkel  $GAH =$  Winkel  $GAJ$ :  $GH = GJ$ . Demnach  $GK = GJ$ .

Ich gebrauche jetzt folgenden, sehr leicht zu beweisenden Hilfssatz:

„Wenn in zwei rechtwinklichten Dreiecken eine Cathete des einen der entsprechenden Cathete des andern gleich ist, so ist von den diesen Catheten gegenüber liegenden Winkeln derjenige der kleinere, der an der grössern Hypotenuse liegt.“

Da in unserer Figur  $AG + GC = BG + GD$ , so ist ebenfalls  $AG - BG = DG - CG$ . Es sei also, wenn möglich,  $AG > BG$ , so ist auch  $DG > CG$ . Weil nun  $GJ = GK$ , so ist vermöge des Hilfssatzes:

Winkel  $GAD <$  Winkel  $GBC$ ;

„  $GDA <$  „  $GCB$ .

Es ist aber auch

Winkel  $DGA =$  Winkel  $CGB$ .

Addirt man diese drei Bestimmungen, so erhält man die Summe



der drei Winkel des Dreiecks  $AGD$  kleiner als die Summe der drei Winkel des Dreiecks  $BGC$ , welches widersinnig ist. Es muss also  $AG=BG$  sein, wie im ersten Falle.

Wenn die äussern Winkel halbirt sind und die halbirenden Geraden sich blos auf ihrer Verlängerung schneiden, sei (Taf. IV. Fig. 3.) Winkel  $CAM = \text{Winkel } CAD$ ; Winkel  $DBL = \text{Winkel } DBC$ ; und  $AC=BD$ . Es schneiden sich die verlängerten  $AC$  und  $BD$  in  $G$ . Fällt man von  $G$  auf  $AD$ ,  $BC$  und  $AB$  die senkrechten Geraden  $GJ$ ,  $GK$ ,  $GH$ , so ist, da Winkel  $DBL = \text{Winkel } GBH = \text{Winkel } DBC = \text{Winkel } GBK$ :  $GH=GK$ . Eben so, weil Winkel  $CAM = \text{Winkel } HAG - \text{Winkel } CAD = \text{Winkel } GAJ$ :  $GH=GJ$ . Also auch  $GJ=GK$ . Es sei nun, wenn möglich,  $AG > BG$ , also auch, da  $CA=BD$ ,  $GC > GD$ . Hingefolglich in den rechtwinklichten Dreiecken  $CGK$  und  $DGJ$ , da  $GK=GJ$ , vermöge des Hülssatzes: Winkel  $GCK < \text{Winkel } GDJ$ . Eben so ist in den rechtwinklichten Dreiecken  $GAJ$  und  $GBK$  Winkel  $GAJ = \text{Winkel } CAD < \text{Winkel } GBK$  oder Winkel  $DBC$ . Da nun in den Dreiecken  $ANC$  und  $BND$  die Winkel an  $N$  sich gleich sind, so würde die Summe der drei Winkel des Dreiecks  $ANC$  kleiner als die Summe der drei Winkel des Dreiecks  $BND$  sein, welches widersinnig ist. Es muss also  $AG=BG$  sein, also auch Winkel  $GAB = \text{Winkel } GBA$  oder Winkel  $CAM = \text{Winkel } CAD = \text{Winkel } DBL = \text{Winkel } CBD$ , mithin Winkel  $CBL = \text{Winkel } DAM$ .

Für diese drei Fälle, welches die einzigen sind, in denen die gleichen halbirenden Geraden gleichartig liegen, ist also die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

## XXVIII.

### Neues Theorem über den Grenzübergang in unendlichen Reihen.

Von

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer an der Realschule zu Stralsund.

Zu den drei in diesem Theile des Archivs S. 43 von mir entwickelten Theoremen, betreffend die Grenzübergänge in unendlichen convergenten Reihen, füge ich noch ein viertes von ziemlich ausgedehnter Anwendung.

„Es seien  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ , etc. Funktionen von  $x$ , die sich bestimmten endlichen Grenzen  $\text{Lim } \varphi_1(x)$ ,  $\text{Lim } \varphi_2(x)$ ,  $\text{Lim } \varphi_3(x)$  etc. nähern, wenn  $x$  gegen die Grenze  $\xi$  geht und von einem gewissen Werth des  $x$  an immer positiv ausfallen, jede dieser Funktionen sei ferner kleiner als die vorhergehende, und  $\varphi_n(x)$  werde unendlich klein, indem  $n$  unendlich gross wird, so dass also die Reihe

$$(1) \quad \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_3(x) - \text{etc.}$$

für alle  $x$  in der Nähe von  $\xi$  convergent ist. Wenn nun

$$(2) \quad \text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \text{Lim } \varphi_3(x) - \text{etc.}$$

ebenfalls eine convergente Reihe ist, so wird ihre Summe  $= \text{Lim } f(x)$  sein, indem  $f(x)$  die Summe der Reihe (1) ist.“

Um dies zu erweisen, bezeichnen wir allgemein

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \dots \pm \varphi_m(x) \text{ mit } s_m,$$

$$\text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \dots \pm \text{Lim } \varphi_m(x) \text{ mit } \sigma_m.$$

Für beliebige Werthe von  $n$  und  $x$  ist dann  $s_{2n} < f(x) < s_{2n+1}$ . Da  $\sigma_m$  sich der Grenze  $L = \text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \dots$  in inf. nähert, wenn  $m$  ins Unendliche wächst, so kann man, indem  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive, aber constante Grösse bedeutet,  $n$  so gross nehmen, dass gleichzeitig  $\sigma_{2n} > L - \frac{1}{2}\varepsilon$  und  $\sigma_{2n+1} < L + \frac{1}{2}\varepsilon$  ist. Da ferner  $s_m - \sigma_m$  bei constant bleibendem  $m$  mit  $\xi - x$  unendlich klein gemacht werden kann, so kann man  $\xi - x$  hinreichend klein nehmen, damit gleichzeitig  $s_{2n} > \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\varepsilon$  und  $s_{2n+1} < \sigma_{2n+1} + \frac{1}{2}\varepsilon$  werde. Hieraus folgt  $s_{2n} > L - \varepsilon$  und  $s_{2n+1} < L + \varepsilon$ , also ist nach dem Obigen auch

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \text{ oder } -\varepsilon < f(x) - L < +\varepsilon.$$

Dies Resultat zeigt an, dass  $f(x) - L$  beliebig klein gemacht werden kann, wenn man nur  $\xi - x$  hinreichend klein macht; folglich ist  $L = \text{Lim } f(x)$ .

Ein ähnliches Theorem ist das folgende:

„Es sei  $f(x, n) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \varphi_3(x) - \dots \pm \varphi_n(x)$  eine endliche Reihe, deren Glieder Funktionen von  $x$  sind, es sei aber die Anzahl der Glieder ( $n$ ) eine Funktion von  $x$ , so dass  $n$  immerwährend wächst und unendlich gross wird, indem  $x$  sich dem Werthe  $\xi$  nähert; wie viel Glieder die Reihe nun auch haben mag, wir nehmen an, dass sie abwechselnde Vorzeichen haben, absolut immer kleiner und unendlich klein werden. Wenn unter diesen Voraussetzungen

$$\text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \text{Lim } \varphi_3(x) - \text{etc.}$$

eine unendliche convergente Reihe ist, so wird ihre Summe  $= \text{Lim } f(x, n)$  sein.“

Dies zu erweisen, bezeichnen wir, wie oben, allgemein  $f(x, m)$  mit  $s_m$  und  $\text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \dots \pm \text{Lim } \varphi_m(x)$  mit  $\sigma_m$ . Bedeutet nun  $m$  eine ganze Zahl, so dass  $2m + 1 < n$  ist, so hat man  $s_{2m} < s_n < s_{2m+1}$ . Ist die Summe der unendlichen Reihe  $\text{Lim } \varphi_1(x) - \text{Lim } \varphi_2(x) + \text{etc.} = L$ ,  $\varepsilon$  eine positive beliebig kleine Grösse, so kann man  $m$  gross genug nehmen, dass gleichzeitig  $\sigma_{2m} > L - \frac{1}{2}\varepsilon$  und  $\sigma_{2m+1} < L + \frac{1}{2}\varepsilon$  werde; ferner kann man bei constant bleibendem  $m$  die Grösse  $\xi - x$  klein genug nehmen, dass gleichzeitig  $s_{2m} > \sigma_{2m} - \frac{1}{2}\varepsilon$  und  $s_{2m+1} < \sigma_{2m+1} + \frac{1}{2}\varepsilon$  werde. Hienach ist  $s_{2m} > L - \varepsilon$  und  $s_{2m+1} < L + \varepsilon$ ; wenn nun  $n$  grösser als  $2m+1$  gedacht wird, so folgt nach dem Obigen

$$L - \varepsilon < s_n < L + \varepsilon \text{ oder } -\varepsilon < s_n - L < +\varepsilon,$$

folglich

$$L = \text{Lim } s_n = \text{Lim} \{ \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + \dots \pm \varphi_n(x) \}.$$

Eine specielle Anwendung von diesem Theoreme kommt in der Abhandlung von Dirichlet vor, betitelt: „Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.“ (Crelle's Journal Band IV. p. 157.) Bedeutet nämlich  $h$  eine positive Zahl nicht grösser als  $\frac{\pi}{2}$ ,  $f(\beta)$  eine von  $\beta=0$  bis  $\beta=h$  stetige, positiv bleibende und fortwährend abnehmende Funktion von  $\beta$ , so kommt es in dieser Abhandlung darauf an, die Grenze des bestimmten Integrals

$$\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

zu bestimmen, indem die positive Grösse  $i$  ins Unendliche wächst. Zu dem Ende theilt Dirichlet das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta &= \int_0^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta + \int_{\frac{\pi}{i}}^{\frac{2\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta + \dots \\ &\dots + \int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta + \int_{\frac{v\pi}{i}}^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta, \end{aligned}$$

wo  $\frac{v\pi}{i}$  das grösste in  $h$  enthaltene Vielfache von  $\frac{\pi}{i}$  ist.

Die Integrale rechter Hand sind abwechselnd positiv und negativ, jedes derselben ist absolut kleiner als das vorhergehende.



Wird  $i$  grösser, so ändern sie immerwährend ihre Werthe, während ihre Anzahl in's Unendliche wächst.

Die Grenze des Integrals  $\int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$  findet sich

$$= f(0) \int_{(v-1)\pi}^{v\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma.$$

Nach unserm Theorem ist folglich

$$\begin{aligned} & \lim \int_0^b \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta \\ &= f(0) \left( \int_0^\pi \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma + \text{in inf.} \right) \\ &= f(0) \int_0^\infty \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma = \frac{\pi}{2} f(0). \end{aligned}$$

Abel hat in seinen Untersuchungen über die Binomialreihe (Crelle's Journal Band I. p. 311 ff.) einige Sätze über die Stetigkeit und Convergenz der unendlichen Potenzreihen aufgestellt, die wir in dem Umfange, der ihnen dort gegeben wird, gegenwärtig noch nicht für begründet halten können. Abel sagt erstens (Lehrsatz IV.): „Wenn die unendliche Reihe  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \text{etc.}$  für einen gewissen Werth von  $x$  ( $\delta$ ) convergent ist, so wird sie auch für jeden (absolut) kleineren Werth von  $x$  convergiren.“ Zweitens: „Innerhalb der Grenzen der Convergenz ist die Reihe überall eine stetige Funktion von  $x$ .“ — Die gegebenen Beweise sind entschieden unrichtig, wie der Leser leicht finden wird; aus dem Beweise für den ersten Satz geht u. A. blos hervor, dass die Reihe nicht unendlich gross ist, wobei sie aber oscilliren kann.

Nach meinen bisherigen Untersuchungen über diesen Gegenstand in diesem Bande des Archivs a. a. O. ist nur festgestellt, dass die unendliche Potenzenreihe ( $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ ) in dem Intervall der Convergenz überall eine stetige Funktion von  $x$  ist, wenn die Convergenz noch statt findet, nachdem alle Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt sind. Nach dem ersten Theorem kann man diese letztere Bedingung fallen lassen, wenn die Glieder abwechselnde Zeichen haben, fortwährend kleiner und unendlich klein werden.

Die erwähnte Bedingung wird indessen in der Regel erfüllt sein. Sind nämlich  $A_0, A_1, A_2, \dots$  die absoluten Werthe der Coefficienten, so können drei Fälle unterschieden werden, nämlich

1) Das Verhältniss  $\frac{A_{n+1}}{A_n}$  bleibt bei unendlich werdendem  $n$  kleiner als eine bestimmte endliche Grösse  $L$  (wobei es sich einer Grenze nicht zu nähern braucht), alsdann convergirt die Reihe der absoluten Werthe sicher zwischen  $x = -\frac{1}{L}$  und  $x = +\frac{1}{L}$ , und unser Theorem findet Anwendung.

2) Das Verhältniss wird unendlich gross; alsdann convergirt die Reihe für keinen Werth von  $x$  und von Stetigkeit kann demnach auch nicht die Rede sein. Dabin gehört z. B. die Reihe  $x + 1.2x^2 + 1.2.3x^3 + 1.2.3.4x^4 + \text{etc.}$

3) Es findet weder der erste Fall statt, noch der zweite. Unter dieser Voraussetzung können wir gegenwärtig weder über die Convergenz noch über die Stetigkeit etwas Allgemeines feststellen. Reihen dieser Art kommen in der Analysis freilich selten vor. Eine solche Reihe wäre  $x + \frac{1}{2}x^2 + 2x^3 + \frac{1}{3}x^4 + 3x^5 + \frac{1}{4}x^6 + \text{etc.}$ , welche offenbar convergent ist von  $x = -1$  bis  $x = 1$ .

Es wird häufig behauptet, dass zwei unendliche Reihen  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ ,  $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$  identisch sein müssen, also  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$  etc., wenn sie in einem Intervall von  $x = 0$  bis  $x = i$  convergent bleiben und für dieselben Werthe von  $x$  immer gleiche Werthe haben. Dies müsste darauf beruhen, dass die Summe der unendlichen convergenten Reihe  $\gamma_1x + \gamma_2x^2 + \gamma_3x^3 + \dots$  mit  $x$  zugleich gegen Null convergirt. Aber dies muss noch zweifelhaft bleiben in den Fällen (ob solche Fälle möglich, ist freilich auch noch fraglich), wo die Reihe nicht mehr convergent bleibt, wenn man alle Glieder auf die numerischen Werthe reducirt.

## XXIX.

**Lösung einer Aufgabe aus der Zahlentheorie auf geometrischem Wege.**

Von

**Herrn Dr. H. Burhenne,**

Lehrer der Mathematik an der höheren Gewerbeschule in Cassel.

Auf drei sich rechtwinklig schneidenden Axen werden vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte aus die den ganzen Zahlen  $x, y, z$  entsprechenden Längen abgetragen, und zwar kann dies in jedem der durch die sechs Axen-Abschnitte bestimmten acht Raumoctanten geschehen. Drei solche Axenabschnitte in irgend einem Octanten bestimmen die Dimensionen eines rechtwinkligen Parallelepipedes, dessen Eckdurchmesser mit  $R$  bezeichnet werde, so dass

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist. Denkt man sich  $x, y, z$  als Grössen von Kräften in den Richtungen der drei Axen, so stellt  $R$  die Resultirende vor. Der Strahl  $R$  bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus in demselben Verhältnisse wie die Grössen  $x, y, z$  stehen. Indem  $x, y, z$  sich ändern, resultiren vom Durchschnittspunkte der Axen als Anfangspunkte aus unzählig viele Strahlen, deren Längen  $R$  theils rational, theils irrational sind und welche untereinander theils in rationalem, theils in irrationalem Verhältnisse stehen. Es sollen nun allgemein zwei Strahlen, deren Verhältniss ein rationales ist, untersucht werden. Wir betrachten irgend einen Strahl  $R'$ , für welchen die Grössen  $x, y, z$  die bestimmten Werthe  $a, b, c$  haben, so dass

$$R' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ist, und suchen dazu alle möglichen Resultirenden

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

unter der Bedingung, dass  $R$  und  $R'$  in einem rationalen Ver-

Verhältnisse zu einander stehen, das heisst, wir verlangen die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)v^2$$

in ganzen Zahlen, wo  $a, b, c$  constante und  $x, y, z, v$  veränderliche ganze Zahlen bedeuten.

Um diese Aufgabe auf geometrischem Wege zu lösen, haben wir nur die einfachsten Eigenschaften eines solchen Strahlenverhältnisses in's Auge zu fassen.

Jeden der unzähligen Strahlen, für welchen das Verhältniss der  $x, y, z$  ein rationales, also in ganzen Zahlen ausdrückbares ist, wollen wir kurz einen gesetzlichen Strahl nennen. Zwei Strahlen, welche in derselben geraden Linie auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen, haben gleiche Länge. Sind zwei Strahlen gesetzliche, so ist auch der zu beiden senkrechte Strahl ein gesetzlicher. Zerlegt man einen gesetzlichen Strahl (wie beim Parallelogramme oder Parallelepipede der Kräfte) in irgend andere gesetzliche Strahlen, so werden von diesen rationale (ganze oder gebrochene) Vielfache ihrer Länge abgeschnitten. Nimmt man von gesetzlichen Strahlen rationale Vielfache ihrer Länge, so ist der resultirende Strahl ein gesetzlicher und seine Länge ist ein Vielfaches derjenigen Länge, womit er aus den Grundaxen resultirt. Daraus ergibt sich leicht Folgendes:

Sind irgend zwei Strahlen  $R$  und  $R'$  gesetzliche von gleicher Grundlänge, so ist auch der ihren Winkel halbirende Strahl  $R''$  ein gesetzlicher.

Wird der Winkel zweier Strahlen  $R$  und  $R'$  vom Strahle  $R''$  halbt und es sind  $R$  und  $R'$  gesetzliche Strahlen, so ist auch  $R''$  ein gesetzlicher Strahl, welcher mit  $R$  in einem rationalen Verhältnisse steht. Nämlich da  $R$  und  $R'$  symmetrisch liegen in Beziehung auf  $R''$ , so zerlegt sich  $R$  in den Strahl  $R''$  und den dazu senkrechten Strahl  $r$ , der auch ein gesetzlicher ist, auf gleiche Weise, wie eine gleiche Länge von  $R'$  sich zerlegt in  $R''$  und den Gegenstrahl von  $r$ , der auch ein gesetzlicher ist.

Um also zu einem gegebenen Strahle  $R'$  sämtliche Strahlen  $R$  zu finden, welche zu  $R'$  in rationalem Verhältnisse stehen, braucht man nur irgend einen gesetzlichen Strahl  $R''$  zu nehmen und  $R$  so zu legen, dass  $R''$  den Winkel von  $R$  und  $R'$  halbt.

Die Projectionen des Strahles  $R'$  auf die Axen seien  $a, b, c$ , die des Strahles  $R''$  seien  $m, n, p$ , wo  $m, n, p$  beliebige ganze Zahlen vorstellen und die Projectionen des Strahles  $R$  seien  $x, y, z$ . Wenn nun  $R''$  den Winkel der beiden anderen Strahlen halbt, so erhält man für das Verhältniss der  $x, y, z$  aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie:

$$x = 2m(am + bn + cp) - a(m^2 + n^2 + p^2),$$

$$y = 2n(am + bn + cp) - b(m^2 + n^2 + p^2),$$

$$z = 2p(am + bn + cp) - c(m^2 + n^2 + p^2).$$

Diese Werthe lösen die obige Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)v^2$$

in ganzen Zahlen auf, wobei es natürlich nur auf das Verhältniss der  $x, y, z$  (abgesehen vom Vorzeichen) ankommt.

Man erhält:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)^2.$$

Da in demselben Raumoctanten Strahlen von jeder Länge auftreten, so braucht man für  $m, n, p$  keine negativen, sondern nur alle möglichen positiven ganzen Zahlen zu setzen.

Die vorstehende Betrachtung könnte auch auf eine verallgemeinerte Weise dargestellt werden, aber ich wollte hier nur auf die Idee hindeuten, wie die geometrischen Eigenschaften eines solchen Strahlenvereines zur Auffindung numerischer Gesetze benutzt werden können.

## XXX.

### Ubungsaufgaben für Schüler.

Von

Herrn Professor Dr. Oskar Schlömilch,

an der polytechnischen Schule zu Dresden.

In der zweiten Auflage von Herrn Professor Kunze's schätzbarem Lehrbuche der Geometrie findet sich S. 231 nachstehende historische Notiz:

„Albert Gerhard stellt in seinen Zusätzen zu Stevin's Werken (Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin etc. par Albert Girard. A Leyde 1634, fol. pag. 169) folgende Reihe von Zahlen auf, in welcher jedes Glied, vom dritten an, durch Addition der beiden vorhergehenden (Glieder) gebildet wird:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ....

und behauptet von ihr, dass je drei aufeinander folgende Zahlen näherungsweise die Verhältnissglieder einer nach stetiger Proportion getheilten Linie darstellen. Wenn z. B. die ganze Linie 89 ist, so ist näherungsweise 55 der grössere und 34 der kleinere Abschnitt, indem beinahe die Proportion gilt  $89:55 = 55:34$  u. s. w.

Bezeichnen wir die obigen Zahlen der Reihe nach mit  $T_0, T_1, T_2$ , etc., so ist einerseits

$$(1) \quad T_0 = 0, \quad T_1 = 1, \quad T_{n+2} = T_{n+1} + T_n;$$

andererseits für unendlich wachsende  $n$ :

$$(2) \quad \lim \frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{oder} \quad \lim \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Für den Beweis der letzteren Eigenschaft beruft sich Herr Professor Kunze auf die Verwandlung von  $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$  in einen Kettenbruch, doch ist dies ein unnütziger Umweg, denn die Gleichung (2) folgt unmittelbar aus der Beziehung  $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$ . Einiges Interesse dürfte vielleicht die independente Form der obigen Zahlen besitzen; ich theile sie hier mit, weil sie in dem obigen Werke nicht angegeben ist und weil ihre Herleitung in sofern eine passende Schüleraufgabe bildet, als es dazu nur der Kenntniss des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten und der unendlichen Reihe für  $\frac{1}{1-z}$  bedarf.

Bezeichnen wir die Binomialcoefficienten 1,  $m$ ,  $\frac{1}{2}m(m-1)$ , u. s. w. mit  $(m)_0$ ,  $(m)_1$ ,  $(m)_2$  etc., so ist

$$(3) \quad T_{n+1} = (n)_0 + (n-1)_1 + (n-2)_2 + (n-3)_3 + \dots$$

oder auch

$$(4) \quad T_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Etwas allgemeiner wird die Sache, wenn man die Zahlenreihe  $U_0, U_1, U_2$ , etc. nach dem Gesetze

$$(5) \quad U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_{n+2} = \alpha U_{n+1} + \beta U_n$$

bildet; es ist dann für positive  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$(6) \quad U_{n+1} = (n)_0 \alpha^n + (n-1)_1 \alpha^{n-2} \beta + (n-2)_2 \alpha^{n-4} \beta^2 + (n-3)_3 \alpha^{n-6} \beta^3 + \dots$$

und auch

$$(7) \quad U_n = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})^n - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta})^n}{2^n \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}$$

Bildet man endlich die Zahlenreihe  $V_0, V_1, V_2, \dots$  auf die Weise, dass  $V_0$  und  $V_1$  ganz beliebig bleiben und die übrigen Glieder nach der Formel  $V_{n+2} = \alpha V_{n+1} + \beta V_n$  bestimmt werden, so gilt die Gleichung:

$$(8) \quad V_n = V_0 U_{n+1} + (V_1 - \alpha V_0) U_n,$$

worin  $U$  die vorige Bedeutung hat. Man kann dafür auch schreiben:

$$(9) \quad V_n = V_0 P_n + V_1 Q_n,$$

und darin ist

$$(10) \quad \begin{cases} P_n = (n-2)_0 \alpha^{n-2} \beta + (n-3)_1 \alpha^{n-4} \beta^2 + (n-4)_2 \alpha^{n-6} \beta^3 + \dots \\ Q_n = (n-1)_0 \alpha^n + (n-2)_1 \alpha^{n-2} \beta + (n-3)_2 \alpha^{n-4} \beta^2 + \dots \end{cases}$$

wie aus dem Obigen unmittelbar folgt; ebenso leicht findet man geschlossene Formen für  $P_n$  und  $Q_n$ .

## XXXI.

### Miscellen.

Schreiben des Herrn Director Nagel an der Realschule  
zu Ulm an den Herausgeber.

Der bekannte Lehrsatz: Wenn die Halbierungslinien zweier Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenkelig, hat seiner Zeit viele Fe-



dem in Bewegung gesetzt, ohne dass, so viel mir bekannt ist, ein Beweis gefunden worden wäre, welcher den Namen eines wahrhaft elementaren vom Standpunkte der reinen Geometrie aus verdiente. Ich glaube, dass es mir gelungen ist, einen solchen zu finden, und bitte Sie, denselben in Ihre geschätzte Zeitschrift aufzunehmen, wenn Sie ihn für werth halten, die Aufmerksamkeit Anderer auf sich zu ziehen.

Ich gehe von zwei bekannten Eigenschaften der Halbierungslinie eines Winkels aus, welche in Beziehung auf die nebenstehende Figur sich wie folgt ausdrücken lassen:

Wenn (Taf. IV. Fig. 4.) im  $\triangle ABC$  ein Winkel  $ABC$  durch  $BD$  halbt, die Halbierungslinie verlängert wird, bis sie den um  $\triangle ABC$  beschriebenen Kreis in  $E$  trifft und  $CE$  gezogen wird, so ist

$$1) BD \cdot BE = AB \cdot BC, \quad 2) BE \cdot DE = CE^2.$$

Das erste ergibt sich bekanntlich einfach aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $BCE$  und  $ABD$ , das zweite ebenso aus der Aehnlichkeit von  $\triangle CDE$  und  $\triangle BCE$ .

Beides vorausgesetzt ergeben sich folgende zwei einfache Lehrsätze:

#### Lehrsatz I.

Wenn (Taf. IV. Fig. 5.) die Halbierungslinien  $BD$ ,  $CF$  der beiden Winkel  $ABC$ ,  $ACB$  eines Dreiecks  $ABC$  einander gleich sind, so sind auch ihre Verlängerungen  $DE$ ,  $FG$  bis an die Peripherie des um  $\triangle ABC$  beschriebenen Kreises einander gleich.

#### Beweis.

Wäre  $DE$  nicht  $= FG$ , so wäre  $DE > FG$ . Im ersten Falle wäre auch  $BE > CG$ , weil  $BD = CF$  ist, also wäre  $BE \cdot BD > CG \cdot CF$  und  $BE \cdot DE > CG \cdot FG$ . Daher wäre auch  $AB \cdot BC > AC \cdot BC$  (s. oben Satz 1.) und  $CE^2 > BG^2$  (s. oben Satz 2.). Wegen des ersten wäre  $AB > AC$ , wegen des zweiten aber  $CE > BG$ , also auch  $\angle CBE < \angle BCG$  \*), folglich auch  $2 \angle CBE > 2 \angle BCG$ , d. h.  $\angle ABC > \angle ACB$ , und daher  $AC > AB$ ; folglich, da nicht beides zugleich stattfinden kann, kann auch  $DE$  nicht  $> FG$  sein. Ebenso wird bewiesen, dass  $DE$  nicht  $< FG$  sein kann, weil sonst wieder zugleich  $AB < AC$  und  $AC < AB$  sein müsste. Folglich muss  $DE = FG$  sein.

#### Lehrsatz II.

Wenn die Halbierungslinien  $BD$ ,  $CF$  der beiden Win-

\*) Weil nämlich  $CBE$  als Peripheriewinkel auf einem grösseren Bogen steht als der Peripheriewinkel  $BCG$ .



kel  $\angle ABC$ ,  $\angle ACB$  eines Dreiecks  $ABC$  einander gleich sind, so sind diese Winkel selbst einander gleich oder  $\Delta ABC$  ist gleichschenkelig.

### Beweis.

Da  $BD = CF$  ist, so ist (nach dem vorigen Lehrsatz) auch  $DE = FG$ , also auch  $BE = CG$ , folglich  $BE \cdot DE = CG \cdot FG$ , d. h.  $CE^2 = BG^2$ , also ist auch  $CE = BG$ , und daher  $\angle CBE = \angle BCG$ , also auch  $2 \angle CBE = 2 \angle BCG$ , d. h.  $\angle ABC = \angle ACB$  oder  $\Delta ABC$  gleichschenkelig.

Einige kleine Notizen von Herrn Hofrath Dr. Clausen zu Dorpat.

Im 15ten Bande des Archivs p. 476 fehlt die Determinante  $D = 897$ . Es ist

$$(3447)^2 - 397(173)^2 = -4.$$

Doctor Arndt hat die Gaussischen Zahlen Disquis. arithm. p. 400, vermuthlich nicht nachgerechnet, wo diese Determinante sich fehlerhaft eingeschlichen hat.

Ich habe durch eine eigene Methode die Zahl  $\frac{10^{17} - 1}{9}$  in ihre Factoren

$$2071723 \text{ und } 5363222357$$

zerlegt. (S. Archiv Bd. 16. p. 56.)

### Vom Herausgeber.

Es ist im sphärischen Dreieck

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(b-c)}{\sin a} \cos \frac{1}{2} A^2 + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} \cos \frac{1}{2} B^2 + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C^2 \\ &= \frac{\sin(b-c)}{\sin a} \cdot \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} \cdot \frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin c \sin a} \\ & \quad + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} \cdot \frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin s}{\sin a \sin b \sin c} \{ \sin(b-c) \sin(s-a) + \sin(c-a) \sin(s-b) \\
&\quad + \sin(a-b) \sin(s-c) \} \\
&= \frac{\sin s}{\sin a \sin b \sin c} \{ [\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b)] \sin s \\
&\quad - [\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b)] \cos s \}
\end{aligned}$$

Aber, wie man sogleich durch Entwicklung der Sinus der Winkelbinomien findet:

$$\cos a \sin(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0,$$

$$\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0.$$

Also

$$\frac{\sin(b-c)}{\sin a} \cos \frac{1}{2} A^2 + \frac{\sin(c-a)}{\sin b} \cos \frac{1}{2} B^2 + \frac{\sin(a-b)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung zwischen allen sechs Stücken des sphärischen Dreiecks müssen sich die Gauss'schen Gleichungen ableiten lassen. Wie ist dies möglich? G.

### Vom Herausgeber.

Ich hatte neulich eine zufällige Veranlassung, mich mit dem Beweise des folgenden geometrischen Satzes zu beschäftigen:

Wenn man von einem Punkte ausserhalb eines gleichseitigen Dreiecks gerade Linien nach den Ecken des Dreiecks zieht, so ist die Summe der Quadrate dieser drei Linien dreimal so gross als die Summe der Quadrate der beiden Entfernungen des Durchschnittspunkts der drei Höhenperpendikel des Dreiecks von einer seiner Ecken und von dem ausserhalb des Dreiecks angenommenen Punkte.

Unter den verschiedenen Beweisarten, welche ich bald fand, scheint mir namentlich eine für Anfänger lehrreich zu sein; auch kann man bei dem Beweise zweckmässig neben rein geometrischen Betrachtungen trigonometrische und arithmetische Betrachtungen in Anwendung bringen; und weil ich nun Sätze, die solche sehr verschiedenartige Betrachtungsweisen zulassen, für besonders instructiv für Anfänger und zu deren Uebung vorzugsweise geeignet halte, so will ich, so unbedeutend die Sache an sich ist, hier mittheilen, was ich über den mir früher ganz unbekannten Satz fand.

Das gegebene gleichseitige Dreieck sei  $ABC$  (Taf. IV. Fig. 6.); der Durchschnittspunkt seiner drei Höhenperpendikel sei  $O$ , wo also bekanntlich  $AO = BO = CO$  ist; der gegebene Punkt außerhalb des Dreiecks sei  $G$ .

Sehr leicht und wohl zuerst wird Jeder auf den folgenden Beweis verfallen.

Von dem Punkte  $G$  fälle man auf die drei Höhenperpendikel des gegebenen gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  die Perpendikel  $GH$ ,  $GJ$ ,  $GK$ ; so ist nach einem allgemein bekannten geometrischen Satze:

$$GA^2 = AO^2 + GO^2 - 2AO \times HO^*),$$

$$GB^2 = BO^2 + GO^2 + 2BO \times JO,$$

$$GC^2 = CO^2 + GO^2 - 2CO \times KO.$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen zusammen, so erhält man, weil, wie schon bemerkt,  $AO = BO = CO$  ist, die Gleichung:

$$\begin{aligned} & GA^2 + GB^2 + GC^2 \\ &= 3(AO^2 + GO^2) + 2AO \times (JO - HO - KO), \end{aligned}$$

und der zu beweisende Satz würde also bewiesen sein, wenn man zeigen könnte, dass

$$JO - HO - KO = 0 \text{ oder } JO = HO + KO$$

ist.

Einem mit den ersten Elementen der ebenen Trigonometrie bekannten Anfänger wird nun wahrscheinlich die sich sogleich darbietende Bemerkung nicht entgehen, dass die Linien  $HO$ ,  $JO$ ,  $KO$  die Cosinus der Winkel  $GOH$ ,  $GOJ$ ,  $GOK$  für den Halbmesser  $GO$  sind, so dass also, wenn wir die in Rede stehenden drei Winkel der Reihe nach durch  $y$ ,  $x$ ,  $z$  bezeichnen, der Beweis darauf ankommt, zu zeigen, dass

$$\cos x = \cos y + \cos z$$

\*) Der Anfänger würde wahrscheinlich zuerst geneigt sein, die ihm geläufigere Gleichung

$$GO^2 = AO^2 + GA^2 + 2AO \times AH$$

anzuwenden; aus dieser Gleichung folgt aber

$$\begin{aligned} GA^2 &= GO^2 - AO^2 - 2AO \times AH \\ &= GO^2 - AO^2 - 2AO \times (HO - AO) \\ &= GO^2 - AO^2 + 2AO^2 - 2AO \times HO \\ &= AO^2 + GO^2 - 2AO \times HO. \end{aligned}$$

Dergleichen Bemerkungen wie vorstehende sollte der geometrische Elementarunterricht immer sorgfältig berücksichtigen.

ist. Nun betragen aber die beiden Winkel  $AOE$  und  $COE$  bekanntlich  $60^\circ$ , und es ist also

$$y = 60^\circ - x, \quad z = 60^\circ + x;$$

so dass der Beweis sich jetzt darauf reducirt, zu zeigen, dass die Gleichung

$$\cos x = \cos(60^\circ - x) + \cos(60^\circ + x)$$

allgemein richtig ist. Weil nun aber

$$\cos(60^\circ - x) = \cos 60^\circ \cdot \cos x + \sin 60^\circ \cdot \sin x,$$

$$\cos(60^\circ + x) = \cos 60^\circ \cdot \cos x - \sin 60^\circ \cdot \sin x$$

ist, so reducirt sich die obige Gleichung auf

$$\cos x = 2 \cos 60^\circ \cdot \cos x.$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

also

$$\cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \cos x.$$

Da dies eine identische Gleichung ist, so ist wirklich allgemein

$$\cos x = \cos(60^\circ - x) + \cos(60^\circ + x)$$

und folglich auch

$$JO = HO + KO \quad \text{oder} \quad JO - HO - KO = 0,$$

also nach dem Obigen

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(AO^2 + GO^2),$$

folglich die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes dargethan.

Vielleicht wird der mit dem obigen Satze sich beschäftigende Anfänger sich nun sagen, dass bei einem solchen rein geometrischen Satze wie dem in Rede stehenden die Anwendung trigonometrischer Formeln einer guten geometrischen Methode nicht ganz gemäss ist; er wird also versuchen, dieser trigonometrischen Rechnung eine geometrische Form zu geben. Sieht er nun, wie das Jeder, wer einen solchen Versuch wagt, sogleich thun wird, seine Figur an, so wird ihm gewiss bald einfallen, dass, weil die Winkel  $GHO$ ,  $GJO$ ,  $GKO$  rechte Winkel sind, die drei Punkte  $H$ ,  $J$ ,  $K$  in dem Kreise liegen müssen, den er sich über  $GO$  als Durchmesser beschrieben denken kann. Die Linien  $OH$ ,  $OJ$ ,  $OK$  sind dann drei von dem in diesem Kreise liegenden Punkte  $O$  ausgehende Sehnen dieses Kreises; die beiden äussersten Seh-

den  $OH$  und  $OK$  schliessen einen Winkel von  $120^\circ$  ein, und dieser Winkel wird von der mittleren Sehne  $CJ$  halbiert. Hält nun der Anfänger diese Bemerkung, die bei einigem Geschick ihm schwerlich entgehen wird, mit dem Obigen zusammen, so wird er leicht darauf kommen, dass es sich um den Beweis eines geometrischen Satzes handelt, welcher also lautet:

Wenn von einem beliebigen Punkte  $O$  (Taf. IV. Figur 7.) in der Peripherie eines Kreises zwei beliebige, einen Winkel von  $120^\circ (= \frac{4}{3} R.)$  einschliessende Sehnen  $OH$  und  $OK$  ausgezogen werden und dieser Winkel durch eine dritte Sehne  $OJ$  halbiert wird, so ist diese dritte Sehne immer der Summe der beiden anderen Sehnen gleich.

Der Beweis dieses Satzes kann nicht schwer fallen. Denn zieht der Anfänger  $HJ$ ,  $JK$ ,  $KH$ , so bemerkt er auf der Stelle, dass, in Folge des Satzes von den Peripheriewinkeln, die Winkel  $JHK$  und  $JKH$  respective den Winkeln  $JOK$  und  $JOH$  gleich, also wie die letzteren selbst einander gleich sind, so dass jeder der beiden Winkel  $JHK$  und  $JKH$  zwei Dritttheile eines rechten Winkels oder  $60^\circ$  beträgt, folglich das Dreieck  $HJK$  bekanntlich gleichseitig, also  $HJ = HK$  ist. Wird nun  $OK$  auf  $OJ$  abgetragen, nämlich  $JL = OK$  gemacht, so sind, weil die Winkel  $HJL$  und  $HKO$  einander gleich sind, in den Dreiecken  $HJL$  und  $HKO$  offenbar zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, diese Dreiecke folglich einander congruent. Also ist  $LH = OH$ . Daher ist das Dreieck  $OHL$  gleichschenkelig, und folglich, weil  $\angle HOL = \frac{2}{3} R$  ist, gleichseitig, also  $OL = OH$ . Daher ist  $OJ = OL + LJ = OH + OK$ , wie bewiesen werden sollte.

Auf eine andere Art kann aber unser Satz auf folgende Art bewiesen werden, und dies ist eigentlich der Beweis, auf den ich hier aufmerksam machen wollte, da er mir für Anfänger besonders lehrreich scheint.

Man ziehe in Taf. IV. Fig. 8. die Linien  $DE$ ,  $EF$ ,  $FD$ , wodurch das gleichseitige Dreieck  $DEF$  entsteht; ausserdem ziehe man die Linien  $GD$ ,  $GE$ ,  $GF$ ; so ist in den Dreiecken  $BGC$ ,  $CGA$ ,  $AGB$ , deren Seiten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  in  $D$ ,  $E$ ,  $F$  halbiert sind, nach einem bekannten Satze:

$$GB^2 + GC^2 = 2(GD^2 + BD^2),$$

$$GC^2 + GA^2 = 2(GE^2 + CE^2),$$

$$GA^2 + GB^2 = 2(GF^2 + AF^2);$$

also, wenn man addirt und nach der Addition zugleich durch 2 dividirt:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = GD^2 + GE^2 + GF^2 + BD^2 + CE^2 + AF^2,$$

oder, wie sogleich erhellet:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = GD^2 + GE^2 + GF^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Setzen wir aber

$$S = GA^2 + GB^2 + GC^2, \quad \Sigma = AB^2 + BC^2 + CA^2;$$

$$S_1 = GD^2 + GE^2 + GF^2, \quad \Sigma_1 = DE^2 + EF^2 + FD^2$$

und brauchen ähnliche Bezeichnungen für die gleichseitigen Dreiecke, die sich aus dem Dreiecke  $DEF$  u. s. w. eben so construiren lassen, wie das Dreieck  $DEF$  aus dem Dreiecke  $ABC$  construirt worden ist; so erhalten wir überhaupt eine Reihe von Gleichungen von der folgenden Form:

$$S = S_1 + \frac{1}{4}\Sigma,$$

$$S_1 = S_2 + \frac{1}{4}\Sigma_1,$$

$$S_2 = S_3 + \frac{1}{4}\Sigma_2,$$

u. s. w.

$$S_{n-2} = S_{n-1} + \frac{1}{4}\Sigma_{n-2}$$

$$S_{n-1} = S_n + \frac{1}{4}\Sigma_{n-1}.$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung:

$$S = S_n + \frac{1}{4}(\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_{n-2} + \Sigma_{n-1}).$$

Nun erhellet aber sehr leicht, dass

$$\Sigma_1 = \frac{1}{4}\Sigma, \quad \Sigma_2 = \frac{1}{4}\Sigma_1, \quad \Sigma_3 = \frac{1}{4}\Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-1} = \frac{1}{4}\Sigma_{n-2};$$

also

$$\Sigma_1 = \frac{1}{4} \cdot \Sigma,$$

$$\Sigma_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \Sigma,$$

$$\Sigma_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \Sigma,$$

u. s. w.

$$\Sigma_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \Sigma;$$

folglich

$$\begin{aligned} & \Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_{n-2} + \Sigma_{n-1} \\ &= \left\{1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} \Sigma \end{aligned}$$

ist. Daher ist nach dem Obigen

$$S = S_n + \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} \Sigma.$$

Nach der Lehre von den geometrischen Progressionen ist aber

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

also

$$S = S_n + \frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n) \Sigma.$$

Lässt man jetzt  $n$  in's Unendliche wachsen, so nähert offenbar  $S_n$  sich der Gränze

$$GO^2 + GO^2 + GO^2 = 3 \cdot GO^2,$$

weil die gleichseitigen Dreiecke wie  $DEF$  u. s. w. sich immer genauer und genauer auf einen blossen Punkt zusammenziehen; und  $(\frac{1}{2})^n$  nähert sich der Gränze Null. Geht man also in der Gleichung

$$S = S_n + \frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n) \Sigma$$

für in's Unendlich wachsende  $n$  zu den Gränzen über, so erhält man offenbar die Gleichung:

$$S = 3 \cdot GO^2 + \frac{1}{2} \Sigma,$$

d. h. die Gleichung:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3 \cdot GO^2 + \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Es ist aber

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2AO \times DO,$$

$$BC^2 = BO^2 + CO^2 + 2BO \times EO,$$

$$CA^2 = CO^2 + AO^2 + 2CO \times FO;$$

also

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 6 \cdot AO^2 + 2 \cdot AO \times (DO + EO + FO) \\ &= 6 \cdot AO^2 + 6 \cdot AO \times DO; \end{aligned}$$

und weil nun  $DO$  die Hälfte von  $AO$  ist, weil das Dreieck  $BDO$  offenbar die Hälfte des Dreiecks  $ABO$  von gleicher Höhe mit ersterem ist, so ist

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 6 \cdot AO^2 + 6 \cdot AO \times \frac{1}{2} AO \\ &= 6 \cdot AO^2 + 3 \cdot AO^2 = 9 \cdot AO^2, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 + CA^2) = 3 \cdot AO^2;$$

also nach dem Obigen

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3(AO^2 + GO^2),$$

welches der zu beweisende Satz ist.

Weil der Begriff der Gränze eigentlich der Grundbegriff der gesamten höheren Mathematik in ihrer neueren Darstellung ist und sich durch diese ganze Wissenschaft hindurch zieht, ja immer wiederkehrt, so oft man in derselben nur ein Blatt umschlägt,

überhaupt eine strenge Darstellung namentlich der höheren Analysis, ohne immer auf diesen Begriff zurückzukommen, gar nicht möglich ist; so scheinen Betrachtungen wie die obigen, auf elementare geometrische Sätze angewandt, für den Unterricht von Anfängern, die in der Mathematik weiter gehen wollen, einen sehr wohl begründeten Werth zu haben, und sollten sorgfältig benutzt werden, wo sie nur irgend sich darbieten, um den Anfänger so früh als möglich mit dem strengen Begriffe der Gränze und der strengen Anwendung desselben bekannt zu machen. G.

**Resultate meteorologischer Beobachtungen vom Herrn Professor der Physik Thomas Egid Heller dahier und dem Unterzeichneten von einem halben Jahrhunderte.**

**Grösste Kälte.**

1798, 26. Januar . . .	—20° R.
1798, 30. Januar . . .	—24,6
1820, 15. Februar . . .	—20,3
1823, 23. Januar . . .	—23,8
1830, 2. Februar . . .	—25,0
1849, 3. Januar . . .	—27,0

**Grösste Wärme.**

1798, 17. Aug. des Mittags	+22° R.
1790, 15. Juni . . .	+22,0
1799, 17. August . . .	+26,3
1800, 30. Mai . . .	+22,0
1800, 15. Juli . . .	+23,0
1800, 15. August . . .	+26,3
1802, 9. August . . .	+27,0
1807, 31. Juli . . .	+25,7
1807, 31. August . . .	+25,6
1808, 31. Juli . . .	+25,4
1811, 29. Juli . . .	+25,1
1819, 8. Juli . . .	+24,2
1822, 2. Juli . . .	+26,1
1823, 27. August . . .	+26,3
1824, 4. Juli . . .	+25,0
1825, 8. Juli . . .	+26,0
1826, 2. August . . .	+26,8
1827, 2. August . . .	+25,3
1828, 5. Juli . . .	+28,0
1829, 25. Juli . . .	+25,0
1832, 14. Juli . . .	+26,2
1833, 26. Juli . . .	+26,0
1834, 13. Juli . . .	+27,0
1842, 5. Juli . . .	+24,0
1844, 23. Juni . . .	+24,0

Fulda, den 25. Februar 1853.

Dr. Schneider, Geheimer Medizinalrath.



## Vom Herausgeber.

In dem in England sehr beliebten Schiffahrtslehrbuche von E. Riddle \*) finde ich S. 33. den folgenden sehr einfachen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes, der wenigstens mir bis jetzt unbekannt war. Da mancher Leser des Archivs sich wahrscheinlich mit mir in demselben Falle befinden wird, so theile ich den Beweis hier mit, ohne erst, was vielleicht meine Pflicht als Herausgeber wäre, wozu es mir aber gerade jetzt an Zeit und auch an Lust gebricht, alle möglichen geometrischen Lehrbücher durchzumustern, hier mit.

Man fälle (Taf. IV. Fig. 9.) von  $A$  auf die Hypotenuse  $BC$  das gewöhnliche Perpendikel  $AL$ , verlängere es nach beiden Seiten hin, bis  $HK$  in  $M$ , das verlängerte  $DE$  in  $O$  geschnitten wird, und verlängere dann auch  $BH$  über  $B$  hinaus, bis  $DE$  in  $N$  geschnitten wird. Dann ist offenbar  $\triangle BDN \cong \triangle ABC$ , weil  $BD = AB$ ,  $\angle BDN = \angle BAC$  und offenbar  $\angle DBN = \angle ABC$  ist, da  $ABD$  und  $CBN$  rechte Winkel sind, die den Winkel  $ABN$  als gemeinschaftlichen Theil enthalten. Also ist  $BN = BC = BH$  und die Parallelogramme  $ABNO$  und  $BLMH$  haben daher gleiche Grundlinie und Höhe, sind also einander gleich. Weil nun aber auch  $AB^2$  offenbar dem Parallelogramme  $ABNO$  wegen gleicher Grundlinie und Höhe gleich ist, so ist  $AB^2 = \text{Rechteck } BLMH$ . Ganz eben so auf der anderen Seite  $AC^2 = \text{Rechteck } CLMK$ . Also  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , w. z. b. w.

Dass  $FG$ , wenn man es über  $F$  hinaus verlängert, auch auf den Punkt  $O$  treffen muss, erhellet auf der Stelle, weil offenbar  $EO = DN = AC = AF$  ist.

Mir scheint dieser Beweis wohl werth zu sein, beim Unterrichte in den Elementen der Geometrie benutzt zu werden. G.

---

\*) A Treatise on Navigation and Nautical Astronomy. By Edward Riddle, Fifth Edition. London 1849.

## Berichtigung.

In Taf. IV. Fig. 3. Theil XVI. muss noch die Linie  $AC$  gezogen werden.

Theil XIX. Seite 228. Z. 5 statt  $J$  setze man  $G$ .

„ „ „ „ Z. 6 „  $\hat{a}$  „ „  $\hat{a}$ .

„ „ „ 230. Z. 5 v. u. statt  $k$  setze man  $2k$ .

---

**LXXVII.****Literarischer Bericht.****Geschichte der Mathematik und Physik.**

Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (zu Wien). Zweiter Jahrgang. 1852. Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei.

Den ersten Jahrgang dieses Almanachs der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien haben wir im Literar. Ber. Nr. LXVIII. S. 873 angezeigt, und freuen uns, jetzt den zweiten Jahrgang anzeigen zu können. Der Grund, weshalb wir diesen Almanach besonders anzeigen, ist schon a. a. O. angegeben: weil derselbe nämlich eine Angabe der wichtigsten Lebensumstände und der Schriften einer ziemlich grossen Anzahl trefflicher Mathematiker und Physiker enthält. Was in dieser Beziehung der erste Jahrgang wegen der Kürze der bis zu seiner Herausgabe verstrichenen Zeit noch nicht leisten konnte, ist in diesem zweiten Jahrgange mit möglichster Vollständigkeit nachgeholt worden, und wir halten daher diesen Almanach, besonders in seiner jetzigen Gestalt, für einen nicht unwichtigen Beitrag zur Literaturgeschichte der Mathematik und Physik, so wie der Naturwissenschaften überhaupt, weshalb wir die Leser unserer Zeitschrift wiederholt auf denselben aufmerksam zu machen nicht verfehlen. Ausserdem ist derselbe natürlich auch in so fern von grossem allgemeinen Interesse, weil er sehr vollständige Nachrichten über die Einrichtung und die Arbeiten einer der ersten Akademien der Wissenschaften enthält, welche, ungeachtet ihres bis jetzt nur kurzen Beste-

hens, doch schon eine sehr grosse und sehr erfolgreiche wissenschaftliche Thätigkeit entfaltet hat.

In dem Journal des savants. Mai. 1852. findet man den dritten und letzten Theil des Berichts von dem trefflichen Biot über die Correspondance of Sir Isaac Newton and Professor Cotes. Dieser dritte Theil ist in mehrfacher Beziehung besonders interessant, hauptsächlich aber deshalb, weil Biot darin die vielbesprochene Frage discutirt, ob Newton die Principien ursprünglich in derselben Weise, wie er sie der Nachwelt übergeben hat, d. h. auf synthetischem Wege verfasst, oder ob er die Resultate ursprünglich analytisch gefunden, und dann der Darstellung nur eine synthetische Fassung gegeben habe, wofür als Grund angegeben wird: *l'habitude qu'avait Newton, de voiler sa pensée, et de cacher sa personne, mêmes dans les lettres scientifiques, où il prenait la part la plus active.* Biot entscheidet sich, wie zu erwarten stand, für die zweite Alternative, dass nämlich alle in den Principien niedergelegten Resultate ursprünglich analytisch gefunden worden sind. Dass eben diese ganz synthetische Fassung die Lectüre der Principien sehr schwierig macht, ist eine jedem Mathematiker bekannte Sache, und Biot führt in dieser Beziehung ein sehr merkwürdiges und offenes Geständniss von Euler an, welches wir, allen den Mathematikern, die gleichfalls Schwierigkeiten bei dem Studium der Principien fanden, zum Trost, hier vollständig mittheilen. Euler sagt nämlich über sich selbst: „*Quod omnibus scriptis, quae sine analysi sunt composita, id potissimum mechanicis obtingit, ut lector, etiam si de veritate eorum, quae proferuntur, convincatur, tamen non satis claram et distinctam eorum cognitionem assequatur, ita ut easdem quaestiones, si tantillum immutentur proprio Marte vix resolvere valeat; nisi ipse in analysin inquirat, easdemque propositiones analytica methodo evolvat. Idem omnino cum Newtoni principia perlustrare coepissem, usu venit, ut quamvis plurimum problematum solutiones satis percepisse mihi viderer, tamen parum tantum discrepantia problemata resolvere non potuerim. Illo igitur jam tempore, quantum potui, conatus sum analysin ex synthetica illa methodo elicere, easdemque propositiones ad meam utilitatem analytice pertractare, quo negotio insigne cognitionis meae augmentum percepi.*“ — Schliesslich spricht Biot sein allgemeines Urtheil über Newton unumwunden aus, und schliesst, Bezug nehmend auf die theologischen Untersuchungen, mit denen Newton sich bekanntlich gleichfalls vielfach beschäftigt hat, mit den folgenden bemerkenswerthen Worten: „*Mon savant ami, le Docteur Brewster, m'a formellement déclaré, que „l'interpretation donnée par Newton des prophéties, indépendamment de l'évidence historique et morale sur laquelle elle repose, peut être développée jusqu'à la plénitude d'une démonstration.*“ Vingt ans se sont écoulés depuis que j'ai reçu de lui cet avertissement charitable, que j'ai dû regarder comme une promesse de m'éclairer. Je supplie instamment le Docteur Brewster, de ne pas tarder à le faire, et rendre bientôt sa démonstration publique; car, à l'âge auquel nous sommes tous deux parvenus, il pourrait arriver d'un moment à l'autre, qu'il ne se trouvât plus en position de me la donner, ou moi de

la recevoir. Il devrait même se faire scrupule de l'avoir gardée pour lui seul, pendant si longtemps."

Für Biot ist Newton un homme, qui, comme géomètre, et comme expérimenteur, est sans égal. Par la réunion de ces deux genres de génie, à leur plus haut degré, il est sans exemple. Sur ses travaux scientifiques, qui ont reculé les bornes de l'esprit humain, repose sa gloire tout entière. Ses écrits sur la chronologie et les prophéties sont de tours de force d'érudition, sans résultat. Les premiers sont impérissables; des autres il ne reste rien.

## Arithmetik.

**Lehrbuch der Arithmetik und niedern Analysis zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet von Dr. G. Radicke, Professor an der Rhein. Friedrich - Wilhelms - Universität zu Bonn. Zweite mit einer Zulage vermehrte Ausgabe. Berlin. (Nicolai'sche Buchhandlung.) 1853. 8. 2 Thlr. 15 Sgr.**

Einer Buchhandlung, die einen so geachteten Namen in ihrem Schilde führt, wie die Nicolai'sche Buchhandlung in Berlin, hätten wir es in der That nicht zugetrauet, dass sie sich dazu entschliessen könnte, solche alte verlegene Waare wie die obige, mit einem vorgeklebten neuen Titelblatte, und einem auf dem Titel übrigens komischerweise mit dem in literarischen Dingen ganz ungewöhnlichen Namen einer „Zulage“ bezeichneten Anhang versehen, zu dem im vorliegenden Falle enormen Preise von 2 Thlr. 15 Sgr. als eine „Zweite Ausgabe“ wieder zu Markte zu bringen. Müsste das Archiv nicht fürchten, sich vielleicht gar einen Injurienprozess zuzuziehen, so würde ein solches Verfahren hier ohne Weiteres mit dem Namen bezeichnet werden, mit welchem es jeder rechtlich denkende Mann, auch ohne dass wir den Namen hier aussprechen, für sich belegt. Aber wenigstens die Leser des Archivs dringend zu warnen vor dieser Speculation, ist, diesen gegenüber, unsere Pflicht, der wir also hiermit nachzukommen nicht verfehlen, ohne dieselben übrigens sonst von dem Ankaufe des manches Gute enthaltenden Buches abhalten zu wollen, auf dessen weitere Besprechung wir aber bei einem solchen Verfahren, wie es hier unzweifelhaft vorliegt\*), nicht eingehen können.

**Logarithmorum VI decimalium nova Tabula Berolinensis et numerorum vulgarium ab 1 usque ad 100000 et functionum trigonometricarum ad decades minutorum secundorum, auctore Carolo Bremiker, Dr. Ph. Berolini (Nicolai). 1852. 8. 4 Thlr.**

---

\*) Die Vorrede z. B. ist unterzeichnet: Bonn, den 3. August 1847.

Es ist bekannt, dass man bei den meisten astronomischen und anderen Rechnungen mit sechsstelligen Logarithmen gerade, das auch vollkommen ausreicht, indem fünf Stellen zu wenig, sieben Stellen zu viel sind. Daher ist auch schon oft von mit dem astronomischen Calcul innigst vertrauten Gelehrten, die zu unsern grössten Mathematikern und Astronomen gehören, der Wunsch ausgesprochen worden, dass solche sechsstellige Logarithmentafeln in recht zweckmässiger Weise angefertigt werden möchten. Auch hat man diesem so oft und so dringend ausgesprochenen Wunsche schon in mehrfacher Weise zu entsprechen gesucht. Da die betreffende Literatur unsern Lesern gewiss im Allgemeinen hinreichend bekannt ist, so wollen wir nur beispielsweise auf eine Tafel hinweisen, die, wie es wenigstens scheint, fast ganz übersehen worden ist, aus welchem Grunde, wissen wir nicht. Dies sind die *Tabulae Logarithmorum notis decimalibus sex expressorum*. Auctore G. A. Jahn. Lipsiae. 1844. Diese sechsstelligen Tafeln geben die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für den ersten Grad von Secunde zu Secunde, für die übrigen Grade von drei zu drei Secunden. Die letztere Einrichtung, die freilich für den Gebrauch in so fern sehr bequem ist und alle Anerkennung verdient, weil dadurch die Möglichkeit gegeben ist, die Proportionaltheile immer ganz leicht und sicher bloss im Kopfe zu berechnen, hat auf der andern Seite den Nachtheil herbeigeführt, dass die Tafel sehr voluminös geworden ist, weil die ganze Tafel 541 Seiten in Quart umfasst. Vielleicht ist es gerade dieser Umstand, welcher der Verbreitung der Jahn'schen Tafel hinderlich gewesen ist, vielleicht auch ausserdem das ziemlich graue Papier, was aber wenigstens unsern Augen gerade sehr zusagt. Denn gegen die Correctheit der Tafel haben wir wenigstens keinen Grund Zweifel zu erheben, und, haben wir sie auch nicht viel gebraucht, so ist sie uns doch nicht gerade unbequem vorgekommen. Indem wir diese Tafel, deren Preis von 1 Thlr. 5 Sgr. auch äusserst niedrig gestellt ist, gelegentlich in Erinnerung bringen wollten, kehren wir nun wieder zu dem vorliegenden Werke des Herrn Bremiker zurück.

Wir halten diese Tafel für in jeder Beziehung höchst ausgezeichnet, überlassen es aber natürlich den Lesern, sich mit ihrer Einrichtung aus ihr selbst genauer bekannt zu machen, die übrigens von der gewöhnlichen zwar nicht wesentlich abweicht, indess doch auch einige, wenn auch nur kleine, aber den sichern Gebrauch fördernde Abänderungen enthält. Hauptsächlich anerkennungswerth ist es, dass der Herr Vf. in der trigonometrischen Tafel die goniometrischen Functionen bis zu  $0^{\circ}.20'$  von Secunde zu Secunde, für die übrigen Grade von 10 zu 10 Secunden hat fortschreiten lassen, welche höchst empfehlenswerthe Einrichtung sich z. B. in der trefflichen Callet'schen siebenstelligen Tafel eben so findet, und von der neuen Ausgabe der Vega'schen Tafel sich gleichfalls anzueignen leider mit Unrecht unterlassen worden ist. Druck und Papier der Bremiker'schen Tafel lassen für uns nicht das Geringste zu wünschen übrig, und erinnern an die besten derartigen Erzeugnisse der englischen Presse. Mancher dürfte indess noch wünschen, dass zu den Tafeln ein grün-

liches Papier genommen worden wäre, wie dies z. B. in den trefflichen englischen Tafeln von Shortrede, die Bessel so sehr empfahl, geschehen ist. Das Intervall von 10 zu 10 Secunden scheint uns für die Bequemlichkeit des praktischen Gebrauchs ganz hinreichend zu sein, das Volumen der Tafeln bleibt in Folge dieser Einrichtung ein sehr mässiges, und wird nicht ein allerdings einigermaßen unbequemes, wie das der vorher erwähnten Jahn'schen Tafel, bei aller sonstigen Verdienstlichkeit dieser letzteren. Die sehr lehrreiche Einleitung, die *Arcuum Longitudines pro radio 1*, die *Transmutatio arcuum in horas earumque partes*, die *Tabula temporis siderei mutandi in tempus medium* und die *Logarithmi constantes* sind natürlich nicht bloss sehr angenehme, sondern auch nöthige Zugaben, und beweisen, wie vollkommen Herr Bremiker mit allen an ein solches Werk zu stellenden Forderungen bekannt ist, und wie sehr er allen etwaigen Wünschen entgegen zu kommen versteht. Wir wünschen diesem trefflichen Werke aus vollkommenster Ueberzeugung die weiteste Verbreitung. Freilich wird der Preis von 4 Thlrn., wenn er auch im Verhältniss zu der höchst eleganten und trefflichen Ausstattung nicht zu hoch erscheint, doch vielleicht Manchen abhalten, sich in den Besitz eines Werkes zu setzen, von dem man dringend wünschen muss, dass ein möglichst niedriger Preis jeden auch nur wenig bemittelten Mathematiker in den Stand setzen möchte, sich dessen Gebrauch nicht entziehen zu müssen.

---

## Mechanik.

Leonhard Euler's Theorie der Bewegung fester und starrer Körper mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von J. Ph. Wolfers, Dr. und Professor (zu Berlin). Erste Abtheilung. Mit 5 Figuren-Tafeln. Greifswald. C. A. Koch's Verlagshandl. (Th. Kunike.) 1853. 8.

Als wir im Literar. Ber. Nr. LI. S. 707. das Erscheinen des zweiten Theils der von Herrn Professor Wolfers in Berlin unternommenen Uebersetzung von Euler's *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, worin Euler die Bewegung eines Punktes behandelt, anzuzeigen das Vergnügen hatten, sprachen wir am Ende jener Anzeige den Wunsch aus, dass es Herrn Professor Wolfers gefallen möchte, auch Euler's *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. Ed. nov. Gryphisw. 1790. 4., welche der Bewegung eines Körpers gewidmet ist, zu übersetzen. Wir freuen uns sehr, anzeigen zu können, dass dieser Wunsch schon jetzt in Erfüllung gegangen ist, indem uns wenigstens die erste Abtheilung einer von Herrn Professor Wolfers verfertigten Uebersetzung des genannten schönen und wichtigen Werkes vorliegt. Dass Euler's *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* in wissenschaftlicher Beziehung noch wichtiger ist, als die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, ist jedem, Euler's Leistungen

zu würdigen verstehenden Mathematiker bekannt, und Herr Professor Wolfers hat sich daher nach unserer Ueberzeugung durch die Uebersetzung jenes Werkes fast noch ein grösseres Verdienst um die Wissenschaft erworben als durch seine frühere Arbeit, weil durch diese Uebersetzung die, wie es scheint, namentlich von jüngeren Mathematikern nicht nach Verdienst gekannte und beachtete *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* gewiss — woran wir keinen Augenblick zweifeln — wieder ganz in ihre alten Rechte eingesetzt werden wird. Denn Euler's Werke veralten nie, und müssen für alle Zeiten die Hauptgrundlagen des mathematischen Studiums bleiben, so viele und so grosse Fortschritte auch, weniger in materieller Rücksicht, als in Bezug auf wahrhafte mathematische Strenge und Evidenz, namentlich die analytische Wissenschaft in neuester Zeit gemacht hat. Dass Herrn Professor Wolfers's Uebersetzung allen Anforderungen, die man an dergleichen Arbeiten zu machen berechtigt ist, vollständig genügt, brauchen wir jetzt nicht erst zu versichern, da die Mathematiker aus seinen früheren Leistungen wissen, wie genau er sich mit dem in Euler's Schriften herrschenden Geiste bekannt und vertraut gemacht hat. Ausserdem hat er aber auch wieder durch eine Reihe höchst zweckmässiger Anmerkungen, die mit richtigem Takte auch hier vom eigentlichen Werke gesondert sind, so dass Euler's Werk ganz rein vor uns liegt, alle sich etwa findenden Schwierigkeiten vollständig beseitigt, und dadurch dem Bedürfniss der weniger Geübten in sehr geeigneter Weise entsprochen. Die äussere Ausstattung lässt nichts zu wünschen übrig, und die Verlagshandlung hat jedenfalls auch Anspruch auf den Dank der Mathematiker, indem sie dem grossen wissenschaftlichen Eifer des Herrn Uebersetzers durch ihre Bereitwilligkeit, das Werk zu verlegen, freundlich entgegen kam. Mögen daher Alle, welche für das Studium der Mechanik sich interessiren, dieses Werk sich angelegentlichst empfohlen sein lassen, und möge dasselbe eben so wie sein Vorgänger dazu beitragen, Euler's Geist stets unter uns zu erhalten! Namentlich auch jüngern Mathematikern empfehlen wir dieses Werk zum eifrigsten Studium, wobei wir noch bemerken, dass dasselbe das Studium des frühern Werks keineswegs unbedingt voraussetzt, sondern dass dasselbe durch und in sich selbst verständlich ist, wofür Euler durch eine dem Werke vorangesetzte, in der vorliegenden Uebersetzung 126 Seiten umfassende, Einleitung gesorgt hat. Dem Erscheinen der zweiten Abtheilung sehen wir mit Verlangen entgegen.

---

## Vermischte Schriften.

In dem Bulletin phys.-mathém. der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Petersburg finden sich einige ausgezeichnete Abhandlungen des Herrn Observator Dr. Clausen zu Dorpat, auf die wir unsere Leser aufmerksam machen müssen:



**T. IX. Nr. 23. Ueber den Werth des Kettenbruchs**

$$a + \frac{b}{a+1 + \frac{b+1}{a+2 + \frac{b+2}{a+3 + \text{etc.}}}}$$

wenn  $b$  grösser als  $a+1$  ist.

Schon Euler und später Stern in Crelle's Journal T. VIII. S. 42. haben diesen Kettenbruch untersucht. Wenn es auch Herrn Clausen, wie er selbst sagt, nicht gelungen ist, die Theorie desselben in aller Allgemeinheit zu entwickeln, so hat er doch mehrere bemerkenswerthe Resultate gefunden, die zum Theil zur Berichtigung der früheren Untersuchungen dienen.

**T. IX. Nr. 24. Ueber die Form architektonischer Säulen.**

Diese früher von Euler und Lagrange untersuchte Frage hat der Herr Vf. einer neuen Untersuchung unterworfen, wobei es ihm wider Erwarten gelungen ist, die Differentialgleichung, deren allgemeine Integration Lagrange nicht versucht hatte, auf elliptische Transcendenten zurückzuführen. Dabei zeigte es sich, dass die zweckmässigste Form vom Cylinder abweicht, und dass das Volumen dieses bei gleicher Höhe und Tragkraft sich zum Volumen jener Form wie  $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$  verhält.

**T. X. Nr. 2. Ueber den Einfluss der Umdrehung und der Gestalt der Erde auf die scheinbaren Bewegungen an der Oberfläche derselben.**

Die sinnreiche Idee Foucault's, die Umdrehung der Erde durch ein einfaches um einen Punkt schwingendes Pendel Jedem anschaulich zu machen, die in neuester Zeit bekanntlich so viel Aufsehen gemacht hat, so dass man die betreffenden Versuche selbst vielfach vor das grosse Publikum gebracht hat, veranlasste Herrn Hofrath Clausen, diese Bewegung in der vorliegenden Abhandlung einer strengen und ausführlichen analytischen Untersuchung zu unterwerfen, bei der er von den Formeln ausgeht, die Gauss in Benzenberg's bekanntem Werke über die Umdrehung der Erde gegeben hat. Wir empfehlen diese gründliche analytisch-mechanische Untersuchung, in der auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht genommen worden ist, allen denen sehr, welche an dem Foucault'schen Versuche das gebührende Interesse nehmen; nur muss man nicht etwa glauben, mit bloss elementar-mathematischen Kenntnissen an das Studium dieser Abhandlung gehen zu können, indem dieselbe vielmehr den analytischen Scharfsinn und analytische Kenntnisse vielfach in Anspruch nimmt. Aber ohne diese Kenntnisse wird man auch nie eine vollkommene Einsicht in Foucault's Versuch erlangen können,



wobei wir indess auch nicht die Versuche tadeln wollen, sondern denselben vielmehr das Wort reden, welche dazu bestimmt sind, in möglichst elementarer oder populärer Weise die Gründe des Foucault'schen Versuchs möglichst zur Anschauung zu bringen, eben weil dieser Versuch bereits vielfach vor's grosse Publikum gebracht worden ist. Den Mathematiker kann aber nur eine solche Entwicklung, wie wir sie in der vorliegenden gründlichen Abhandlung des Herrn Verfassers finden, vollkommen befriedigen, und ist auch allein geeignet, ein wahres Verständniss dieses höchst interessanten Gegenstandes zu vermitteln.

*Mélanges mathématiques et astronomiques. T. I.*

**Ueber die Olbers'sche Methode Cometenbahnen zu berechnen.**

Jedem, der sich mit der Berechnung der Cometenbahnen beschäftigt hat, sagt der Herr Verf., ist es bekannt, welche grosse Erleichterung durch die Olbers'sche sehr sinnreiche Methode erlangt wurde, und dass wir einen grossen Theil der berechneten Bahnen dieser Methode verdanken. Einige Astronomen haben die Behauptung aufgestellt, dass die durch die Olbers'sche Methode erlangte erste Annäherung viel grösser sei, als die erste Annäherung durch die übrigen bekannten Methoden, und zwar, dass jene die Annäherung bis auf Grössen der zweiten Ordnung excl. geben, wenn man die Grössen erster Ordnung den Zwischenzeiten proportional setzt; während die Laplace'sche und andere Methoden diese Annäherung nur bis auf Grössen erster Ordnung excl. geben. Diese letztere Behauptung sucht der Herr Vf. in diesem lesenswerthen Aufsätze zu widerlegen, wobei er mit Recht ganz im Geiste seines verewigten Gönners, des trefflichen Olbers, zu handeln glaubt, der, aller Eitelkeit fremd, jeden auf einen Irrthum gegründeten Ruhm gewiss von sich zu entfernen gesucht hätte. Kein Leser wird auch diesen Aufsatz des verehrten Herrn Verfassers ohne vielfache Belehrung aus der Hand legen.

---

**LXXVIII.****Literarischer Bericht.****Geometrie und Trigonometrie.**

**Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene und körperliche Geometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Mit 190 Figuren im Text. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1851. 8. 1 Thlr.**

**Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Zum Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet von H. B. Lübsen. Hamburg. Perthes, Besser & Mauke. 1852. 8. 21 Ngr.**

Herr Lübsen in Hamburg hat sich schon durch seine früher erschienenen Lehrbücher der Arithmetik und Algebra und der analytischen-Geometrie von ganz ähnlicher Tendenz wie die beiden obigen verdient gemacht. Alle diese Lehrbücher, auch die beiden obigen hier anzuzeigenden, zeichnen sich durch eine ungemeine Deutlichkeit sehr vortheilhaft aus, und enthalten überall in sehr verständiger Auswahl von den betreffenden Wissenschaften allemal das, was für das praktische Bedürfniss nöthig ist und zu demselben

in nächster Beziehung steht, ohne die für tüchtige praktische Anwendung der Mathematik bestimmte Kraft des Knabens und Jünglings durch eine Menge oft sehr unnützer Sätze und Sätzchen eher zu schwächen und zu ermüden als zu stärken, wie leider viele unserer Lehrer immer noch thun. In dem nördlichsten Theile unsers deutschen Vaterlands, in Hamburg, Bremen, Holstein, Schleswig, Ostfriesland u. s. w. scheint man in dieser Beziehung einen viel richtigeren und sicherern Takt zu besitzen als in vielen andern Theilen desselben. Deshalb giebt es aber auch dort so ungemein viele tüchtige, namentlich praktische Mathematiker, und namentlich sollen die Friesen in dieser Beziehung sich auszeichnen. „In Ostfriesland“ pflegte mein verewigter Freund Dirksen in Berlin, dem die Strenge in der Mathematik das Höchste war, oft zu sagen, „ist jeder Bauer ein Mathematiker“, und er selbst war, so viel ich mich erinnere, ursprünglich ein gewöhnlicher ostfriesischer Landschulmeister gewesen, wenn mich auch meine Erinnerung vielleicht trügen kann. Herrn Lübsen's Bücher sind der deutlichste Ausdruck dieses wahrhaft tüchtigen praktischen mathematischen Sinnes, ohne übrigens der Strenge der Darstellung wesentlich etwas zu vergeben, und wir empfehlen sie daher recht sehr zur Beachtung. Wer ihren Inhalt sich vollständig angeeignet hat, wird zu den vielfachsten praktischen Anwendungen der Mathematik befähigt sein, insofern er vorläufig auf die Anwendung der höheren Theile der Wissenschaft verzichtet. Die Geometrie enthält auch schon die Grundzüge der Feldmesskunst, des Nivellirens, und der praktischen Körpermessung, auch der Ausmessung der Fässer, u. s. w.

Knaben und Jünglinge, welche für ein praktisches Fach, das auf einer mathematischen Basis ruhet, bestimmt sind, müssen, natürlich bei völliger Strenge, so schnell als möglich durch die Theorie hindurch geführt, und nicht mit Gott weiss was für geometrischen Theoremen und Problemen, direkten und reciproken, — so viel Vergnügen dieselben auch zuweilen dem eigentlichen theoretischen Mathematiker darbieten können, sollten sie auch für die Wissenschaft selbst oft nicht von besonderer Bedeutung sein, — gequält werden. Dann muss möglichst schnell die vielfachste und allseitigste praktische Anwendung folgen, und die sogenannte formelle Geistesbildung, die man durch jene Sätze und Sätzchen zu fördern meint, wird bei diesen tüchtigen praktischen Naturen sich dann schon von selbst finden, wenn nur, was wir immer voraussetzen, die theoretische Grundlage eine völlig strenge und für die künftige praktische Anwendung völlig ausreichende war. Herrn Lübsen's in vieler Beziehung sehr zu empfehlende Lehrbücher scheinen uns ein interessanter und sehr ansprechender Ausdruck dieses gewiss sehr richtigen pädagogischen und methodischen Grundsatzes zu sein, weshalb wir sie hier allen Lehrern, die solche Knaben und Jünglinge, wie oben von uns näher bezeichnet worden sind, auf Real- und anderen ähnlichen Schulen zu unterrichten haben, was gewiss für den, der selbst praktischen Sinn hat, ein sehr anziehender und segensreicher Lebensberuf ist, bestens haben empfehlen wollen. Schliesslich möchten wir noch wünschen, dass Herr Lübsen sein Talent zu einer ähnlichen Bearbeitung der Differential- und Integralrechnung anwenden möchte.

**Compendium der darstellenden Geometrie nebst einiger Anwendung derselben auf Schattenbestimmung und Perspective.** Für Realschulen als auch zum Selbstunterricht verfasst von Justus Nigris, Architekten und Professor der darstellenden Geometrie, des geometrischen Zeichnens u. s. w. an der öffentlichen städtischen Ober-Realschule zu Presburg. Mit elf Steintafeln. Presburg. Krapp. 1853. 8.

Dieses Lehrbuch enthält nicht bloss die Elemente der eigentlichen descriptiven Geometrie, sondern auch die Elemente des geometrischen Zeichnens mit Einschluss der Perspective und der Schattenconstruction, Alles, namentlich die letzteren Gegenstände, nicht etwa, wie öfters geschieht, bloss praktisch dargestellt, sondern aus strengen geometrischen Betrachtungen abgeleitet. Viele Lehrbücher der descriptiven Geometrie enthalten, wie es uns scheint, namentlich für die Zwecke, denen sie dienen sollen, zu viel. Das vorliegende, welches für den Unterricht auf einer Realschule bestimmt ist, scheint uns eine richtige Mitte sehr gut getroffen zu haben, und enthält, wie schon erinnert, ausser der eigentlichen *Géométrie descriptive* noch manches Andere, was für den Unterricht auf einer Realschule von Wichtigkeit sein kann. Da wir längst sehr gewünscht haben, dass der Unterricht in der descriptiven Geometrie, welcher für künftige mathematische Praktiker von der grössten Wichtigkeit, und zugleich für die Bildung des mathematischen Geistes gewiss eben so fruchtbringend ist wie die übrige Geometrie, daher auch auf den Lehrplänen der sogenannten höheren Bürger-, Real- und Gewerbschulen namentlich in Oesterreich, Baiern, Würtemberg mit Recht längst das volle Bürgerrecht erhalten hat\*), unter die Unterrichtsgegenstände aller solcher Schulen aufgenommen werden möge: so empfehlen wir das vorliegende, wie es uns scheint, recht praktische Buch, allen Lehrern an solchen Schulen zur Beachtung.

## Mechanik.

**Beitrag zur Theorie der Seilpolygone und der Kettenlinie** von Dr. Th. Spieker. Programm des Herzogl. Carls-gymnasium zu Bernburg. Bernburg. 1852. 4.

In diesem lesenswerthen Programm hat der Herr Ver-

---

\*) In Frankreich versteht sich dies seit dem berühmten Erfinder der *Géométrie descriptive* natürlich ganz von selbst.

fasser diejenigen Seilpolygone einer besonderen Untersuchung unterzogen, an denen lauter parallele Kräfte wirken, wozu nur elementare Sätze nöthig waren. Aus den auf diesem elementaren Wege gewonnenen Sätzen hat er dann gleichfalls durch elementare Betrachtungen die meisten Eigenschaften der Kettenlinie abgeleitet, indem man dabei sonst gewöhnlich unmittelbar von der Differentialgleichung der Kettenlinie ausgeht, und die ganze Betrachtung gleich von vorn herein in das Gebiet der Differential- und Integralrechnung hinüber führt. Er ist dabei selbst bis zur Rectification und dem Krümmungshalbmesser fortgeschritten, und bedient sich überhaupt in seiner ganzen Schrift der höheren Analysis sonst gar nicht, als nur bei dem Satze §. 22. über den Schwerpunkt des Seilpolygons, wo die Anwendung derselben wohl auch nicht leicht umgangen werden konnte, da es bei dieser Untersuchung auf die Bestimmung eines Maximums ankam. Wir haben allen Untersuchungen, welche Betrachtungen, die sonst nur mittelst der höheren Analysis angestellt zu werden pflegen, in das Gebiet des sogenannten Elementaren hinüber führen, überhaupt immer das Wort geredet; um so mehr thun wir dies bei einem praktisch so wichtigen Gegenstande wie die Kettenlinie ist, und wenn es in so ansprechender und strenger Weise geschieht wie in dem vorliegenden Programm, von dem wir daher recht sehr wünschen, dass es, wie leider oft bei solchen Schriften geschieht, nicht unbeachtet bleiben möge. Möge der Herr Verfasser fortfahren, seine schönen Kräfte in demselben strengen mathematischen Sinne andern derartigen Untersuchungen zu widmen.

---

## Astronomie.

Wunder des Himmels oder gemeinfassliche Darstellung des Weltsystems. Von J. J. v. Littrow. Vierte Auflage. Nach dem neuesten Zustande der Wissenschaft bearbeitet von Carl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte und Vierte Lieferung. Stuttgart. Hoffmann. 12<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Ngr. .

Indem die beiden ersten Abtheilungen dieses ausgezeichneten Werks, welche wir im Literarischen Berichte Nr. LXXIV. S. 938. angezeigt haben, hauptsächlich die Einleitung, und die Erste Haupt-Abtheilung. Theorische Astronomie oder allgemeine Erscheinung des Himmels, enthielten, enthalten

das vorliegende dritte und vierte Heft die **Zweite Haupt Abtheilung. Beschreibende Astronomie oder Topographie des Himmels** und den Anfang der **Dritten Haupt-Abtheilung. Physische Astronomie oder Gesetze der himmlischen Bewegungen**. Hauptsächlich hat uns die jetzt vollständig vor uns liegende Topographie des Himmels sehr grosses Vergnügen gemacht und grosse Belehrung gewährt, weil wir darin alle am Himmel in älterer, neuerer und neuester Zeit gemachten Entdeckungen mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit zusammengestellt, und oft mit höchst interessanten Betrachtungen begleitet gefunden haben. Dass dem verdienten neuen Herausgeber des Werks hier zu Zusätzen ein grosses Feld eröffnet war, weiss Jeder, wer die neuere Geschichte der Astronomie kennt, und dass Herr Carl v. Littrow diese Gelegenheit, das Werk seines ewigten Vaters in der in Rede stehenden Beziehung auf eine dem jetzigen Zustande der Wissenschaft ganz entsprechende Weise zu vervollständigen, nicht ungenutzt gelassen hat, brauchen wir unsern Lesern wohl nicht erst zu versichern, da seine Genauigkeit in solchen Arbeiten sich schon bei anderer Gelegenheit in der vielfächsten Weise bewährt hat, und ihm die umfassendste Kenntniss des Gegenstandes zur Seite steht. Der Herr Herausgeber beginnt natürlich mit der Sonne. Dass er sich hier auch, über die namentlich bei Gelegenheit der grossen Sonnenfinsterniss vom Jahre 1851 vielfach discutirte Frage über die Sonnen-Atmosphäre ausspricht, versteht sich von selbst. „Weit unmittelbarer aber“ sagt er „wird die Existenz einer Sonnenatmosphäre durch die merkwürdigen Erscheinungen dargethan, die man bei totalen Sonnenfinsternissen beobachtet. Gäbe es ausser der Photosphäre keine Hülle der Sonne, so müsste, da der Mond, wie wir bald sehen werden, wahrscheinlich keine oder doch eine sehr dünne Atmosphäre hat, in dem Augenblicke, wo der Mond die Sonne ganz bedeckt, die Stelle des Himmels, welche von beiden Gestirnen eingenommen wird, lichtlos und höchstens durch ihre völlige Dunkelheit von dem übrigen Firmamente zu unterscheiden sein. Dem ist aber nicht so, sondern es zeigt sich eine sehr helle Glorie um beide Himmelskörper. Mit dem Fernrohre entdeckt man an der inneren Grenze dieser Glorie röthliche Flecke, theils unmittelbar auf dem Mondrande wurzelnd, theils in Wolkenform von demselben getrennt, wie sie Fig. 45. auf Taf. III. nach einer Zeichnung von Biela vom 8. Juli 1842 und Fig. 46. a. b. nach einer Beobachtung des Herausgebers im Jahre 1851 darstellt. *Die Glorie sowohl als die rothen Flecke gehören unzweifelhaft der Sonne an*, da beide Erscheinungen, wie der Mond über die Sonne hingeht, auf der einen Seite der Scheibe an Grösse ab-, auf der andern zunehmen\*). Da unmittelbar nach dem Verschwinden, so wie unmittelbar vor dem Wiedererscheinen der Sonne und gerade an

---

\*) Resultat aller vorurtheilsfreien und den Gegenstand gehörig zu würdigen verstehenden Beobachter. G.



den Stellen des Mondrandes, wo diese kleinsten Phasen der Sonne Statt finden, also beider Körper Ränder sich am nächsten stehen, sich ein rother, sichelförmiger Saum zeigt, so muss man vermuthen, dass die Photosphäre der Sonne von zwei Schalen umgeben ist, deren eine ihr zunächst liegende in rothem Lichte leuchtet, deren zweite, weit umfangreichere, weisses Licht hat. Jene rothe Schichte würde dann an gewissen Stellen emporgetrieben, und bildete so die unter dem Namen Protuberanzen bekannten Lichtbüschel. Ueber die Ursachen dieses Emportreibens ist es bis jetzt nicht gelungen, etwas Bestimmtes zu erforschen; indess haben die Beobachtungen von 1851 einen Zusammenhang zwischen den Protuberanzen und den Sonnenflecken und Fackeln wahrscheinlich gemacht, da sich mehrere Protuberanzen an Stellen gezeigt haben, wo kurz vor oder nach der Finsterniss Flecken und Fackeln gesehen waren. Da wir nach dem Obigen die Sonnenflecken als Krater in der Photosphäre annehmen müssen, so liegt auch die Voraussetzung nahe, dass Gaströmungen aus diesen Kratern Statt finden, und jene Emporhebungen der rothen Schichte bewirken.“ Wir hoffen durch die Mittheilung der vorstehenden ungemein klaren und einleuchtenden Darstellung uns den Dank unserer geehrten Leser erworben zu haben, und hoffen, dass dieselben daraus zugleich entnehmen werden, was sie von den übrigen Partieen dieses ausgezeichneten Werkes zu erwarten haben. Die oben gegebenen Erklärungen sind in der unmittelbarsten Weise aus genauen Beobachtungen geschöpft, und tragen eben deshalb, gerade bei einem solchen Gegenstande, wie dem vorliegenden, den Charakter ächter Naturforschung an sich. Ganz in derselben schönen Weise wie die Sonne werden nach der Reihe besprochen: Merkur; Venus; Mars; die Asteroiden; Jupiter; Saturn; Uranus; Neptun (bei welchem die Geschichte seiner Entdeckung ausführlich erzählt wird); der Mond; die Monde der vier äussersten Planeten; die Kometen; die Anzahl, Entfernung und Grösse der Fixsterne; die Doppelsterne; die veränderlichen Sterne; die Sterngruppen und Nebelmassen des Himmels. Unsere Literatur hat kein Werk aufzuweisen, welches eine so vollständige und so ansprechende Darstellung der Topographie des Himmels enthielte wie das vorliegende, und der Herr Herausgeber hat sich durch dasselbe den Dank aller Freunde, sowohl der Astronomie überhaupt, als auch der beschauenden Astronomie insbesondere, in hohem Maasse erworben, und wird dieser herrlichen Wissenschaft durch sein ausgezeichnetes Werk auch gewiss immer noch mehr Freunde erwerben.

Den beiden letzten Lieferungen, welche der physischen Astronomie gewidmet sein werden, sehen wir mit Verlangen entgegen und werden nicht säumen, dieselben unmittelbar nach ihrem Erscheinen anzuzeigen.

Ueber die Fortschritte der Astronomie in dem letzten Decennium. Besonders abgedruckt aus C.

**v. Littrow's Kalender für alle Stände für die Jahre 1851, 1852, 1853.**

Der von Herrn C. v. Littrow herausgegebene Kalender für alle Stände enthält in seinen Jahrgängen 1851, 1852, 1853 eine sehr interessante Darstellung der Geschichte der astronomischen Entdeckungen in dem letzten Decennium, welche wir unsern Lesern aus vollkommenster Ueberzeugung recht sehr zur Beachtung empfehlen, da sie schwerlich an einem anderen Orte das an astronomischen Entdeckungen so reiche letzte Decennium in eben so vollständiger und interessanter Weise charakterisirt finden werden als in den drei letzten Jahrgängen des obigen überhaupt sehr empfehlenswerthen Kalenders für alle Stände. Der Jahrgang 1851 bespricht die Kometen, der Jahrgang 1852 die neu entdeckten Planeten, der Jahrgang 1853 die Fixsterne; und wir wüssten in der That nicht, was uns bei diesen höchst lehrreichen historischen Darstellungen, die ausserdem noch manche einzelne besonders interessante Notizen enthalten, wie z. B. die im Jahrgang 1851. S. 24. mitgetheilte Stelle aus Hevel's Comographia. pag. 326. über den Kometen von 1652, nach welcher die Duplicität des Biela'schen Kometen keineswegs isolirt dasteht, noch hätte zu wünschen übrig bleiben sollen.

*De magnitudine relativa numeroque accurato stellarum quae solis oculis conspiciuntur fixarum. Commentatio qua orationem ex lege publica a se habendam, ad munus Mathematicum Professoris ordinarii in Academia Regia Monasteriensi adeundum, indicit Eduardus Heis, Philos. Doctor et Prof. Publ. Ord. Monasterii Guestphalorum. 1852. 4.*

Der Herr Vf. des vorliegenden Programms hat sich bekanntlich durch seine Beobachtungen der Sternschnuppen, seine theoretischen Untersuchungen über dieselben, und seine Beobachtungen der veränderlichen Sterne schon anerkannte Verdienste erworben. In diesem sehr lehrreichen Programm unterwirft er die relative Grösse der mit blossem Auge sichtbaren Sterne einer ausführlichen Besprechung, beschreibt seine Beobachtungs- und Rechnungs-Methode, vergleicht die Resultate seiner Beobachtungen mit Argelander's und J. Herschel's Bestimmungen u. dgl., so dass wir dieses Programm aus vollkommenster Ueberzeugung unsern für die in demselben so lehrreich besprochenen Gegenstände sich interessirenden Lesern zur sorgfältigen Beachtung empfehlen können, namentlich allen denjenigen, welche dergleichen, Liebhabern der Astronomie besonders deshalb, weil sie einen besonderen Instrumentenapparat gar nicht in Anspruch nehmen, dringend zu empfehlende Beobachtungen selbst anzustellen beabsichtigen.

---



## P h y s i k.

**Die Physik in ihren wichtigsten Resultaten dargestellt von Friedrich Zamminer, Dr. Phil. und ausserordentl. Prof. an der philosophischen Universität zu Giessen. Mit 11 lithographirten Tafeln. Stuttgart. Frankh. 1852. 8. 2 Thlr. 8 Ngr.**

Dieses neue Handbuch der Physik bildet eine Abtheilung der „Neuen Encyclopädie der Wissenschaften und Künste“ welche die auf dem Titel genannte Buchhandlung herausgibt. Der Zweck desselben ist hauptsächlich eine Vorbereitung zum Verständniss der praktischen Anwendungen der Physik, eine Vorbereitung, welche jedoch eine gründlich - wissenschaftliche sein soll. Wir sind der Meinung, dass der Herr Verfasser diesem Zweck zunächst dadurch in sehr verständiger Weise zu entsprechen gesucht hat, dass er sein Augenmerk hauptsächlich auf die gründliche Darstellung und Erläuterung derjenigen Lehren der Physik richtete, welche in ihren Resultaten als ausgemacht und feststehend angesehen werden können, so dass er also das noch Hypothetische weit weniger berücksichtigte. Da nur Ersteres, nicht Letzteres, für die praktische Anwendung Werth haben kann, so ist das von ihm in dieser Beziehung eingeschlagene Verfahren jedenfalls als ein sehr zweckmässiges zu bezeichnen. Was ferner die Darstellung selbst betrifft, so hat er sich, was dem Zwecke des Buchs gleichfalls vollständig entspricht, überall einer einfachen Sprache und grösster Deutlichkeit befleissigt, so wie denn endlich auch von den Elementen der Mathematik, wo es der beabsichtigte Zweck erforderte, ein häufiger und sehr verständiger Gebrauch gemacht worden ist. Wir glauben daher das vorliegende Buch als seinem Zweck recht wohl entsprechend empfehlen zu können, und machen alle diejenigen, welche die Lehren der Physik nach irgend einer Richtung hin praktisch anzuwenden beabsichtigen, auf dasselbe aufmerksam. Den Inhalt hier besonders anzugeben, ist nicht nöthig, weil er der übliche ist. Dass der mechanische Theil besondere Berücksichtigung gefunden hat, versteht sich von selbst; aber auch der optische Theil wird dem künftigen Optiker, die Abtheilung über Elektricität dem künftigen Telegraphisten, u. s. w. eine gute Vorbereitung auf ihr künftiges Fach gewähren. Möge dem Buche daher die verdiente Beachtung zu Theil werden.

**LXXIX.****Literarischer Bericht.****Arithmetik.**

Compendium der höheren Analysis von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden. Braunschweig. Vieweg. 1853. 2 Rthlr.

Ein gutes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung gehört nach unserer Meinung zu den Seltenheiten. Selbst nach Cauchy's trefflichen Vorarbeiten, durch welche diesen Disciplinen bekanntlich eine ganz neue Grundlage gegeben worden, bleibt, wie wir aus dem Munde berühmter Gelehrten gehört haben, immer noch Vieles zu thun übrig. Cauchy's Methoden sind zwar im Wesentlichen streng und gründlich (dass sie dies nicht überall sind, wird sich im Verlauf unserer Recension zeigen), aber in vielen Punkten gewiss noch der Vereinfachung fähig. Gründlichkeit und möglichste Einfachheit ist das Ziel, welches der Bearbeiter einer wissenschaftlichen Disciplin überhaupt zu erstreben hat. Inwieweit der Verfasser des in der Ueberschrift genannten Buchs diese Aufgabe gelöst hat, wollen wir einer kritischen Beleuchtung unterwerfen.

Die erste Section, die Differentialrechnung, verbreitet sich in neun Capiteln der Reihe nach über Differentiation der Funktionen mit einer und mehreren Variabeln, über Anwendungen auf höhere Geometrie, vieldeutige Symbole, Maxima und Minima, die Reihen von Taylor und Maclaurin, Convergenz und Divergenz der unendlichen Reihen und über imaginäre Funktionen, während in einem Anhange noch von den höheren Differentialquotienten der zusammengesetzten Funktionen die Rede ist. Vermissen könnte man hier die Reihenentwicklung der impliciten Funktionen, namentlich die Reihe von Lagrange, ferner Cauchy's Theorie über die Kennzeichen der Entwicklung der Funktionen in convergente Reihen (Moigno Leçons p. 150), endlich Fourier's Methode, die Wurzeln der numerischen Gleichungen zu entdecken. Doch wird sich die Reichhaltigkeit des Materials immer nach dem jedesma-

ligen Bedürfniss und dem Zweck des Buches zu richten haben. Die Vertheilung des Stoffs betreffend, fällt am meisten auf, dass die durch den Rest begrenzte Taylor'sche Reihe nicht in den Vordergrund gestellt ist; sie muss bei vielen Untersuchungen, die im Buche vorhergehen, z. B. bei der Betrachtung der Funktionen mit mehreren Variablen, die Grundlage bilden, wie sich weiter hin zeigen wird. Eine bedeutende Abweichung von den sonst üblichen Darstellungen besteht darin, dass der Verfasser bei der Entwicklung der Funktionen in unendliche Reihen nach dem Maclaurin'schen Satze die, wie er sich in der Vorrede ausdrückt, immer umständlichen Restbetrachtungen vermieden hat. Dem gewöhnlichen Kennzeichen für die Gültigkeit der Entwicklung substituirt er nämlich zunächst pag. 128 ein anderes, und dann pag. 130 noch ein einfacheres, was freilich für die Reihenentwicklungen eine sehr grosse Bequemlichkeit darbieten würde, wenn es nur richtig wäre. Wir kommen weiter unten darauf zurück. Diese Theoreme über die Gültigkeit der Entwicklung werden, merkwürdig genug, erwiesen, ohne dass von Convergenz der Reihe irgend ein Wort gesagt wird. Ohne diesen vorläufigen Begriff kann man doch weder mit der Entwicklung irgend eine Vorstellung verbinden, noch halten wir einen Beweis für ihre Gültigkeit für möglich. In Cap. VIII. p. 155 wird sodann gezeigt, wie das frühere Kennzeichen für den Bestand der Maclaurin'schen Reihe mit dem über die Convergenz derselben übereinstimmt. Darnach würde folgen, dass diese Reihe immer richtig ist, wenn sie convergirt, was aber durchaus falsch ist. Nach dieser allgemeinen Uebersicht wollen wir nun in ein näheres Detail eingehen.

Der Begriff der Stetigkeit ist anders gefasst als bei Cauchy. Die von letzterem aufgestellte Definition, nach welcher  $y = f(x)$  eine von  $x = a$  bis  $x = b$  stetige Funktion von  $x$  ist, wenn sie für jeden Werth von  $x$  in diesem Intervall einen einzigen, endlichen, reellen Werth erlangt, und wenn ausserdem für jeden Werth von  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  die Differenz  $f(x+i) - f(x)$  mit  $i$  unendlich klein wird, ist einzig und allein natürlich und richtig. Ebenso verändert sich  $f(x)$  von  $x = a$  an stetig, sobald  $f(a)$  einen einzigen, endlichen, reellen Werth hat und  $f(a+i) - f(a)$  mit  $i$  unendlich klein wird. Schlömilch stellt (Seite 5 und 6) zwei Definitionen der Stetigkeit auf, deren eine er aus geometrischen Betrachtungen ableitet. Zuerst heisst es: „Die Funktion  $y = f(x)$  verläuft stetig von  $x = a$  bis  $x = b$ , wenn der Uebergang von  $y = \alpha$  bis  $y = \beta$  mit Durchlaufung aller zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  einschaltbaren Zwischenstufen geschehen ist, wo  $\alpha$  und  $\beta$  die Werthe der  $y$  für  $x = a$ ,  $x = b$  resp. bedeuten sollen.“ Dies beruht jedenfalls auf einem Irrthum. Man denke sich  $b > a$ ,  $\beta > \alpha$ ,  $c$  als einen Werth zwischen  $a$  und  $b$ , endlich eine Funktion, die für  $x = c$  ebenfalls den Werth  $\beta$  erlangt. Dieselbe kann nun von  $x = a$  bis  $x = c$  alle Zwischenstufen zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  durchlaufen (was sicher geschehen muss, wenn sie nach Cauchy's Begriff stetig von  $x = a$  bis  $x = c$ ), aber von  $x = c$  bis  $x = b$  kann sie imaginär, unendlich, vieldeutig u. dgl. werden, und unter diesen Voraussetzungen würde man sie doch nicht für stetig halten können von  $x = a$  bis  $x = b$ . Der obigen Definition kann nur dann ein Sinn untergelegt werden, wenn  $y$  von  $x = a$  bis  $x = b$  fortwährend wächst, falls

$\beta > \alpha$ , oder fortwährend abnimmt, wenn  $\beta < \alpha$  ist. Die Umkehrung, dass  $f(x)$  unstetig wird, wenn es Grössen zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  giebt, welche nicht als Zwischenwerthe der Variablen erscheinen, enthält wenigstens nichts Unrichtiges. Auf Seite 6 heisst es: „Die Funktion  $f(x)$  bleibt an der Stelle  $x = \xi$  continuirlich oder erleidet daselbst eine Unterbrechung der Stetigkeit, je nachdem die Differenz  $f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon)$  mit  $\delta$  und  $\varepsilon$  gleichzeitig verschwindet oder nicht.“ Zunächst kann gar nicht die Rede sein von Stetigkeit an einer Stelle, sondern nur von Stetigkeit von der Stelle an oder in der Nähe derselben; man wird vielmehr bestimmter sagen: die Funktion wird für den speciellen Werth von  $x$  imaginär oder unendlich oder unbestimmt etc. Andererseits stelle man sich vor, dass  $f(\xi + \delta) - f(\xi)$ ,  $f(\xi - \varepsilon) - f(\xi)$  sich derselben von Null verschiedenen Grenze  $A$  nähern, wenn  $\delta$  und  $\varepsilon$  gegen die Null convergiren, in welchem Falle  $f(x)$  in der Nähe von  $\xi$  unstetig sein wird; die Differenz  $f(\xi + \delta) - f(\xi - \varepsilon) = f(\xi + \delta) - f(\xi) - [f(\xi - \varepsilon) - f(\xi)]$  wird dann mit  $\delta$  und  $\varepsilon$  unendlich klein, und folglich würde die Funktion in der Nähe von  $\xi$  nach Schlömilch stetig sein, was dem Vorhergehenden widerspricht. Schlömilch ist auf diesen Begriff durch Betrachtung einer Kurve geführt, an der dem Werth  $x = \xi$  zwei verschiedene Ordinaten entsprechen, während sie sonst stetig verläuft. Er scheint überhaupt der Meinung zu sein, dass die geometrische Darstellung einer zwischen zwei Grenzen von  $x$  stetigen Funktion in einem ununterbrochenen Zuge zwischen diesen Grenzen bestehen müsste; selbst Cauchy sagt (Leçons pag. 9): „Ces conditions ne peuvent être satisfaites, qu'autant que les différents points forment une ligne continue entre les limites.“ Dass diese Vorstellung aber unrichtig ist, kann man an der Funktion  $y = x \sin \frac{1}{x}$  sehen. Diese verschwindet für  $x = 0$ , behält immer bestimmte reelle Werthe, auch wird  $f(0 + i) - f(0) = i \sin \frac{1}{i}$  mit  $i$  unendlich klein, folglich ist die Funktion immer stetig, und doch ist der Zug von  $x = -\xi$  bis  $x = +\xi$  durch den Werth  $x = 0$  unterbrochen. Zwischen  $x = 0$  und  $x = +\xi$  oder auch  $x = -\xi$  und  $x = 0$  zeigt diese Funktion unendlich viele Maxima und Minima, wenn  $\xi$  eine gewisse Kleinheit erreicht hat. Man kann weder sagen, dass sie von  $x = 0$  an wächst, noch dass sie abnimmt. Folgendes Bild (Taf. III. Fig. 12) veranschaulicht den Lauf der Funktion.

Sieht man von den Fällen ab, wo eine Funktion zwischen zwei Grenzen imaginäre, unendliche oder vieldeutige Werthe erlangt, so scheint übrigens noch keine unstetige analytische Funktion bekannt zu sein, wenn man nicht etwa manche unendliche convergente Reihen oder bestimmte Integrale anführen will. So ist die Funktion  $x^{2m}(1-x) + x^{2m+2}(1-x) + x^{2m+4}(1-x)$  in inf. unstetig in der Nähe von  $x = 1$ , denn für diesen Werth ist sie  $= 0$ , während sie gegen die Grenze  $\frac{1}{2}$  convergirt, wenn  $x$  sich der Einheit nähert.

Das Kapitel über Differenzirung der einfachen Funktionen ist, insofern gut abgehandelt, als wenig vorausgesetzt wird, nicht ein-

mal der Binomische Satz für positive ganze Exponenten. Nur bei der Differenzirung der Potenz (p. 18) ist uns eine Ungenauigkeit aufgestossen. Aus der Gleichung  $\frac{\partial(x^\lambda)}{\partial x} = \lambda x^{\lambda-1}$ , die für alle rationalen  $\lambda$  bereits erwiesen, soll unmittelbar hervorgehen, dass sie auch für irrationale  $\lambda$  gilt, insofern man für  $\lambda$  successive Brüche setzen kann, die sich dem Irrationalwerth ohne Ende nähern. Dieser Behauptung kann jedenfalls nur die Vorstellung zu Grunde liegen, dass ganz allgemein  $\frac{\partial f(x, l)}{\partial x} = \text{Lim.} \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial x}$  sei, indem der veränderliche Bruch  $\lambda$  gegen die Grenze  $l$  convergirt, d. h.  $\text{Lim.}_i \frac{f(x+i, l) - f(x, l)}{i} = \text{Lim.}_\lambda \text{Lim.}_i \frac{f(x+i, \lambda) - f(x, \lambda)}{i}$ . Es müsste also erwiesen werden, dass man zu demselben Resultat gelangt, wenn man in dem Ausdruck  $\frac{f(x+i, \lambda) - f(x, \lambda)}{i}$  einerseits zuerst  $i$  gegen Null und dann  $\lambda$  gegen  $l$ , andererseits zuerst  $\lambda$  gegen  $l$  und dann  $i$  gegen Null convergiren lässt. Dies ist aber im Allgemeinen gar nicht einmal richtig, wie an Beispielen leicht gezeigt werden könnte. Wie man im gegenwärtigen Falle diesen Zweifel heben kann, wollen wir hier der Kürze wegen nicht weiter zeigen.

Ganz ähnliche Zweifel erweckt der Beweis des auf Seite 34 vorgetragenen Satzes. Ist nämlich  $z = f(u, v)$ , wo  $u$  und  $v$  wiederum Funktionen der unabhängigen Variablen  $x$  sind, so soll erwiesen werden, dass  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ , wo  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$  partielle Differentialquotienten bedeuten. Aendert sich  $x$  um  $\Delta x$ , so werden  $u$  und  $v$  die Aenderungen  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  erfahren, und man hat  $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$ . Nähert sich nun  $\Delta x$  der Null, also auch  $\Delta u$ ,  $\Delta v$ , so ist zunächst klar, dass der erste Theil rechter Hand sich der Grenze  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$  nähert. Blicke in dem zweiten Theil rechter Hand  $\Delta u$  zunächst constant, während  $\Delta v$  an die Null geht, so erhielte man die Grenze  $\frac{\partial f(u + \Delta u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ ; da aber auch  $\Delta u$  gegen die Null geht, so ist die richtige Grenze  $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ . Allein diesen Schlüssen liegt offenbar eine unrichtige Hypothese zu Grunde. Während nämlich  $\Delta v$  sich der Null nähert, kann  $\Delta u$  nicht einstweilen constant bleiben, denn da  $u$  und  $v$  Funktionen von  $x$  sind, so ist immer eine gleichzeitige Aenderung dieser abhängigen Variablen vorhanden, und wenn man die Sache aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, so lässt sich schlechterdings nicht absehen, was aus dem Ausdruck

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)}{\Delta v}$$

wird, wenn  $\Delta u$  und  $\Delta v$  gleichzeitig gegen Null convergiren. Uebrigens glaubt Referent noch nirgends einen richtigen Beweis



des obigen Theorems gelesen zu haben. Wir würden den Gegenstand etwa auf folgende Weise behandeln: Für drei abhängige Variablen z. B. sei

$$u = f(x, y, z),$$

wo  $x, y, z$  Funktionen von der unabhängigen Variablen  $s$  sein sollen. Bezeichnen wir die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  resp. mit  $\varphi(x, y, z)$ ,  $\psi(x, y, z)$ ,  $\chi(x, y, z)$ , so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + \varphi(x + \Theta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \Delta x, \\ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f(x, y, z + \Delta z) + \psi(x, y + \Theta' \Delta y, z + \Delta z) \Delta y, \\ f(x, y, z + \Delta z) &= f(x, y, z) + \chi(x, y, z + \Theta'' \Delta z) \Delta z; \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta s} &= \varphi(x + \Theta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \frac{\Delta x}{\Delta s} \\ &\quad + \psi(x, y + \Theta' \Delta y, z + \Delta z) \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ &\quad + \chi(x, y, z + \Theta'' \Delta z) \frac{\Delta z}{\Delta s}. \end{aligned}$$

Hier ist  $\Theta$  eine Funktion von  $x, y, z, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ ;  $\Theta'$  eine Funktion von  $x, y, z, \Delta y, \Delta z$ ;  $\Theta''$  eine Funktion von  $x, y, z, \Delta z$ , so aber, dass jede dieser Funktionen zwischen 0 und 1 bleibt, welche Werthe man auch den Grössen, von denen sie abhängen, beilegen mag. Lässt man nun  $\Delta s$  sich der Null nähern, so werden  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  gleichzeitig unendlich klein, und man wird auf der Stelle übersehen, dass die vorhergehende Gleichung übergeht in die Grenzgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial s} &= \varphi(x, y, z) \frac{\partial x}{\partial s} + \psi(x, y, z) \frac{\partial y}{\partial s} + \chi(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt aber nur so lange, als die Funktionen und ihre ersten Differentialquotienten stetig bleiben.

Etwas zu kurz ist die Differenzirung der impliciten Funktionen abgehandelt, indem nur der eine Fall beleuchtet wird, wo eine Gleichung von der Form  $f(x, y) = 0$  gegeben ist.

Die Theorie der Differentiation der Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen, welche S. 38—40 absolvirt wird, ist uns ganz unverständlich geblieben. Wir wollen dies dem Herrn Verfasser nicht so sehr zum Vorwurf machen, da uns die meisten Schriftsteller in diesem Punkte unklar zu sein scheinen; wenigstens ist der Begriff des Differentials einer Funktion von

**SECRET**

Auf Seite 42 wird die Ableitung  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  zuerst als die Grenze definiert, gegen welche der  $n$ te Differenzenquotient convergirt, wenn  $\Delta x$  sich der Null nähert. Da fehlt nun der gar nicht leicht zu gebende Nachweis, dass diese Grenze mit dem durch successive Differenzirung gewonnenen  $n$ ten Differentialquotienten identisch ausfällt.

Auf Seite 50 ist der Beweis für die Gleichung  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$  nicht streng genug, wie man nach dem, was oben gesagt worden, leicht finden wird. Nach einem richtigen Beweise dieser Gleichung sucht man in den meisten Lehrbüchern vergebens.

Der Satz p. 60: „Verschwindet  $f''(x)$  für einen speciellen Werth von  $x$ , ohne dass zugleich  $f'(x)=0$  wird, so findet in dem betreffenden Punkt der Kurve ein Inflexionspunkt statt“, ist falsch. Es ist vielmehr erforderlich, dass die erste der Ableitungen  $f'''(x)$ ,  $f^{IV}(x)$  etc., welche nicht verschwindet, von ungerader Ordnung sei. Würde also z. B.  $f'''(x)=0$ ,  $f^{IV}(x) \geq 0$ , so fände kein Wendepunkt statt, wie bei der Funktion  $f(x)=a+bx+\frac{1}{4}x^4$  für  $x=0$ .

Die Theorie des Krümmungskreises wird wohl am besten aus der allgemeineren Theorie der Berührung höherer Ordnungen, von welcher sich in diesem Buche keine Spur findet, hergeleitet. Denn die allgemeinen Methoden verdienen immer den Vorzug. Es ist auch nicht geradezu nachgewiesen, dass der Osculationskreis sich unter allen denkbaren Kreisen am Engsten an die Kurve anschliesst, auf welchen Punkt es doch gerade ankommt. Herr Prof. Schlümilch betrachtet den Krümmungsmittelpunkt als den Durchschnitt zweier unendlich benachbarter Normalen der Kurve.

Von der Evolute einer ebenen Kurve hätten die beiden Eigenschaften erwiesen werden sollen: 1) dass der Krümmungsradius die Evolute immer tangirt, und namentlich 2) dass die Differenz zweier Krümmungsradien immer dem zwischenliegenden Bogen der Evolute gleich ist; die letztere Eigenschaft deshalb, weil es pag. 73 heisst: „Die Benennung Evolute kommt daher, dass man sich die ursprüngliche Kurve durch Abwicklung eines um die Evolute gelegten Fadens entstanden denken kann.“

In der Theorie der Linien von doppelter Krümmung vermischen wir die Bestimmung der Osculationsebene, der Hauptnormale, des Torsionsmaasses. Das letztere ist besonders wichtig, wenn es sich um die Frage handelt, ob eine räumliche Kurve von einfacher oder von doppelter Krümmung ist. Den Begriff der anschliessenden Ebene und der Hauptnormale kann man nicht wohl entbehren, um eine deutliche Ansicht vom Krümmungskreis zu erlangen. Die von Schlümilch gegebene Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes einer doppelt gekrümmten Linie ist ziemlich willkürlich. Er sucht nämlich den Durchschnitt zweier unendlich benachbarten Normalebenen und fällt auf denselben ein Perpendikel von dem betrachteten Punkte aus, welches dann der



Krümmungsradius ist; oder auch der Krümmungsradius ist die Grenze, gegen welche das Verhältniss des Bogendifferentials zum Contingenzwinkel convergirt, wenn beide unendlich klein werden. Uebrigens vereinfacht sich die Formel 10) Seite 82, indem man findet

$$\pm \rho = \frac{\partial s^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die Behauptung auf Seite 86, dass der Ort der Krümmungsmittelpunkte eine Evolute der gegebenen Curve sei, beruht wohl auf einer Uebereilung. Das Gegentheil hiervon ist schon lange erwiesen; bei einer Curve von doppelter Krümmung berühren die Krümmungshalbmesser weder den Ort der Krümmungsmittelpunkte, noch ist das Differential des Krümmungshalbmessers dem Differential des Bogens dieser Curve gleich. Die letztere ist somit keine Evolute.

Die bei der Bestimmung der so wichtigen Lehre von den Maximis und Minimis angewandte Methode führt, weiter entwickelt, nicht auf die einfachen Bedingungen hin, auf welche es in diesem Gebiete in letzter Instanz ankommt. Ist nämlich  $u = f(x, y, z, \dots)$  die zu untersuchende Funktion, so betrachtet der Herr Verfasser  $x, y, z, \dots$  als Funktionen der unabhängigen Variabeln  $t$ , wonach nun das Problem zufolge der Theorie für Funktionen mit einer unabhängigen Variabeln auf die Untersuchung der successiven Ableitungen  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  etc. zurückkommt. Diese höheren Differentialquotienten fallen nun immer verwickelter aus, je weiter man geht, z. B. für zwei Variabele:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

u. s. w.

und wenn auch nachher immer einzelne Glieder wegfallen, wie z. B.  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  sein muss, so muss man doch vorher die obigen Ableitungen vollständig entwickeln. Basirt man aber die Theorie vom Grössten und Kleinsten auf die oben entwickelte erweiterte Reihe für  $f(x + ch, y + ch', z + ch'', \text{etc.})$ , so stellt sich für beliebig viele Variabele ein einfaches Resultat heraus, nach welchem es nur auf die Betrachtung des Differentials

$$\delta u = \left( \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} h' + \dots \right)^2$$

(nach der symbolischen Bezeichnung) ankommt: wenigleich die Bedingungen dafür, dass eine ganze homogene Funktion mehrerer Variabeln ihr Zeichen nicht ändert, sich allgemein nur schwer entwickeln lassen.

Wir sehen uns nun im Interesse der Wissenschaft leider genöthigt, die Hauptirrhümer in dem Buche zu berühren. Auf Seite 127 und 128 finden sich folgende Theoreme:

1) Bleiben die Funktionen  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalls  $x$  bis  $x+h$ , so gilt die Formel

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots$$

und zwar für alle  $x$  und  $h$ , welche der Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{n-1} f^{(n)}(x)}{1.2.3\dots(n-1)} = 0$$

Genüge leisten.

2) Bleiben die Funktionen  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  etc. endlich und stetig innerhalb des Intervalls 0 bis  $x$ , so ist

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{1.2} x^2 + \dots$$

und zwar für alle  $x$ , welche der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(0) x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} = 0$$

Genüge leisten.

Dass diese Bedingungen unzureichend sind, zeigen wir an der Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2 \log 2} x^2 + \frac{1}{3 \log 3} x^3 + \frac{1}{4 \log 4} x^4 + \dots \\ &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots \end{aligned}$$

Hier ist  $n A_n x^{n-1} = \frac{1}{\log n} x^{n-1}$ , also für  $x=1$ ,  $\lim (n A_n x^{n-1}) = 0$ ;

also müsste die obige Reihe für  $x=1$  gelten, was keinen Sinn hat, indem Abel in Crelle's Journal, Bd. 3. bewiesen hat, dass

$\frac{1}{2 \log 2}$ ,  $\frac{1}{3 \log 3}$ ,  $\frac{1}{4 \log 4}$  etc. eine divergente Reihe ist. Damit

überhaupt die Maclaurin'sche Reihe Gültigkeit habe, muss sie vor allen Dingen convergent sein; dies drückt aber die Bedingung  $\lim (n A_n x^{n-1}) = 0$  keinesweges aus. Auf Seite 130 beweist Herr Prof. Schlömilch, dass man der Bedingung  $\lim (n A_n x^{n-1})$

$= 0$  die folgende val num  $x < \lim \frac{A_n}{A_{n+1}}$  substituiren könne. Diese

Bedingungen sind aber durchaus nicht identisch, aus der zweiten folgt allerdings die erste, aber nicht umgekehrt. Die letztere Bedingung drückt bekanntlich die Convergenz der Reihe aus; wäre sie richtig, so würde folgen, dass die Maclaurin'sche Reihe immer  $f(x)$  zur Summe hat, wenn sie convergent ist. Aber auch dies ist falsch, wie Cauchy (Leçons pag. 105) an folgendem Bei-

spiel gezeigt hat. Entwickelt man die Funktion  $e^{-x} + e^{-\frac{1}{x}}$  nach dem Maclaurin'schen Satze, so findet sich

$$e^{-x} + e^{-\frac{1}{x}} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \frac{x^8}{1.2.3.4} - \text{etc.};$$

alle Differentialquotienten der Funktion sind stetig, die Reihe ist für alle Werthe von  $x$  convergent, und doch ist die obige Gleichung falsch, denn die Summe der unendlichen Reihe ist  $= e^{-x^2}$ , d. h. nur dem ersten Gliede linker Hand gleich. Entwickelt man also  $f(x)$  nach dem Satze von Maclaurin in die unendliche Reihe

$$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots,$$

so genügt es nicht, die Bedingungen der Convergenz dieser Reihe festzustellen, um sie der Funktion gleichsetzen zu können. So verfährt aber Schlömilch bei allen seinen Reihenentwickelungen. Die Sache ist auch ganz klar. Bezeichnet nämlich  $\varphi(x, n)$  den Rest der Reihe, so ist genau

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \varphi(x, n).$$

Convergirt nun bei unendlich wachsendem  $n$  die Summe der Reihe gegen die Grenze  $\Theta(x)$ , der Rest gegen die Grenze  $\psi(x)$ , so folgt  $\Theta(x) + \psi(x) = f(x)$ , also kann  $\Theta(x)$  nur dann  $= f(x)$  sein, wenn  $\psi(x)$  verschwindet.

Eine zweite Frage ist die, ob eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen von  $x$  geordnete convergente Reihe mit der Maclaurin'schen identisch sein muss? Cauchy und Schlömilch behaupten dies (Leçons p. 105; Compendium p. 147); aber die gegebenen Beweise sind nicht streng. Cauchy's Beweis besteht darin, dass er die Gleichung  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  succ. differenzirt und dann immer  $x = 0$  setzt, wo es sich fragt, ob man  $x$  klein genug nehmen kann, dass die Summen  $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$ ,  $1.2a_2 + 2.3a_3 x + 3.4a_4 x^2 + \dots$ , etc. den Grenzen  $a_1$ ,  $1.2a_2$  etc. beliebig nahe kommen. Schlömilch's Verfahren kommt im Wesentlichen eben darauf hinaus. Es ist

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \text{etc.};$$

wenn nun die Reihe  $a_1 x$ ,  $a_2 x^2$ ,  $a_3 x^3$ , etc. immer convergent bleibt von  $x = 0$  bis  $x = i$ , so ist zu beweisen, dass die Summe der Reihe mit  $x$  unendlich klein wird. In meiner Abhandlung: „Bemerkungen zur Convergenz etc.“ (Archiv XX. p. 45) habe ich gezeigt, dass dies immer der Fall ist, wenn das Verhältniss  $\frac{a_{n+1}}{a_n}$  eine endliche Grösse nicht übersteigt. Wie die Sache sich in den übrigen Fällen verhält, bleibt einstweilen zweifelhaft.

Auf Seite 131 heisst es: „Die aus dem Theorem von Mac-laurin abgeleiteten Gleichungen dürfen auf gewöhnliche Weise differenzirt werden, ohne dass das Gültigkeitsintervall der Variablen zu ändern wäre.“ Dies ist falsch, denn wenn die Reihe  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  convergent ist, so braucht nicht  $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$  eine convergente Reihe zu sein.

Auf Seite 135–36 ist die Entwicklung von  $\sec x$  fehlerhaft. Man hat freilich

$$\sec x = 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + \dots \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2};$$

jetzt aber die einzelnen Glieder nach Potenzen von  $x$  entwickeln und dann in irgend einer Ordnung die Glieder zu vereinigen, ist nicht erlaubt (vergl. meine Abhandlung Archiv XX.). Ebenso steht der Grenzübergang auf Seite 142 nicht frei.

Auf Seite 158 ist bewiesen, dass  $u_0, u_1, u_2, \dots$  eine convergente Reihe ist, wenn  $\lim \left[ \left( \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) n \right] > 1$ . Es hätte hier auch bewiesen werden sollen, dass die Reihe divergent ist, wenn jene Grenze kleiner als die Einheit ausfällt. Dies konnte sehr leicht durch die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} + \dots + \frac{n+1}{a+n} &= \left(1 + \frac{1-a}{a}\right) \left(1 + \frac{1-a}{a+1}\right) \dots \left(1 + \frac{1-a}{a+n}\right) \\ &> 1 + (1-a) \left(1 + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n}\right) \end{aligned}$$

bewerkstelligt werden, indem man beachtet, dass die harmonische Reihe divergent ist.

Bei dem Satze Seite 158 fehlt der wichtige Zusatz: „dass die Glieder fortwährend abnehmen.“

Der Satz auf Seite 161 ist falsch, wo es heisst: „Der Differentialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe ist die Summe von den Differentialquotienten der einzelnen Glieder, jedoch nur dann, wenn sowohl die ursprüngliche, als die abgeleitete Reihe convergirt.“ Es ist z. B.

$$\log(1+x) = \left[x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\right] + \left[x^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}x\right)\right] + \left[x^3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}x\right)\right] + \text{etc.}$$

für  $x=1$ , dagegen

$$\frac{1}{1+x} = [1-x] + [x^2(1-x)] + [x^4(1-x)] + \dots$$

nicht richtig für  $x=1$ . Die Differentiation einer unendlichen convergenten Reihe ist im Allgemeinen niemals erlaubt, wenn auch die abgeleitete Reihe immerhin convergent ist. Der Fehler in Schlömilch's Beweis liegt in dem Ausdruck: „es vermindern sich alle  $\rho$ .“

Dass das Resultat unserer bisherigen Betrachtungen über die Differentialrechnung des Herrn Verfassers für denselben nicht sehr günstig ausgefallen ist, bedauert Referent um so mehr, als ihm das mathematische Talent des Herrn Professor Schlömilch, der sich bereits durch andere ausgezeichnete Arbeiten einen wohlbegründeten Ruf erworben, nicht verborgen ist. Wir würden uns geschmeichelt fühlen, wenn Herr Schlömilch unsere Ansichten nicht geradezu verwerflich fände und vielleicht bei einer späteren Bearbeitung des Buches darauf Rücksicht nähme. Gespannt sind wir auf die Integralrechnung, über welche sich hoffentlich ein günstigeres Urtheil wird fällen lassen.

Stralsund, im April 1853.

Der Verfasser des Buches hat sich in der Vorrede (S. 1) erklärt, dass er die Integralrechnung nicht als eine neue, sondern als eine Erweiterung der Differentialrechnung betrachtet. Er sagt: „Die Integralrechnung ist die umgekehrte Operation der Differentialrechnung.“

Der Verfasser hat die Integralrechnung in drei Theile getheilt: 1. Die Integration der rationalen Functionen, 2. Die Integration der irrationalen Functionen, 3. Die Integration der transcendentalen Functionen.

Im ersten Theile behandelt der Verfasser die Integration der rationalen Functionen. Er zeigt, dass jede rationale Function in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden kann, die dann einzeln integriert werden können.

$$\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right) \left(\frac{a+1}{a-1}\right) = \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a^2+1}$$

$$\left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right|$$

Im zweiten Theile behandelt der Verfasser die Integration der irrationalen Functionen. Er zeigt, dass einige dieser Functionen in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden können, die dann einzeln integriert werden können.

Im dritten Theile behandelt der Verfasser die Integration der transcendentalen Functionen. Er zeigt, dass einige dieser Functionen in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden können, die dann einzeln integriert werden können.

Der Verfasser hat die Integralrechnung in drei Theile getheilt: 1. Die Integration der rationalen Functionen, 2. Die Integration der irrationalen Functionen, 3. Die Integration der transcendentalen Functionen.

$$\ln \left( \frac{1}{a-1} \right) = -\ln(a-1) = -\ln(a-1) + \ln(a-1) = -\ln(a-1) + \ln(a-1)$$

$$\ln \left( \frac{1}{a-1} \right) = -\ln(a-1) = -\ln(a-1) + \ln(a-1) = -\ln(a-1) + \ln(a-1)$$

Der Verfasser hat die Integralrechnung in drei Theile getheilt: 1. Die Integration der rationalen Functionen, 2. Die Integration der irrationalen Functionen, 3. Die Integration der transcendentalen Functionen.



## LXXX.

**Literarischer Bericht.****Arithmetik.**

Compendium der höhern Analysis von Dr. Oskar Schlömilch, Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden. 2te Section. (Integralrechnung.) Braunschweig. Vieweg. 1853. 2 Rthlr. (Vgl. Liter. Ber. Nr. LXXIX.)

Die Integralrechnung zeichnet sich durch Reichhaltigkeit des Materials aus. Man findet hier Gegenstände abgehandelt, die man in den meisten derartigen Werken gänzlich vermisst, z. B. die nach den Sinussen und Cosinussen der vielfachen Bogen fortschreitenden Reihen von Fourier, die Fourier'schen Doppelintegrale, den Integrallogarithmus und Integralsinus, endlich den freilich nur sehr kurzen Abriss einer Theorie der elliptischen Funktionen. Die Darstellung ist übersichtlich gehalten, und überall, wo es angeht, an geometrische Betrachtungen angeknüpft worden, was dem Verständniss der Sachen ohne Zweifel sehr förderlich ist. Referent hat auch mehrere dem Verfasser eigenthümliche Betrachtungen wahrgenommen; dahin gehören die Theorie der periodischen Reihen von Lagrange und Fourier, die Capitel über Integrallogarithmus und Integralsinus, der Beweis für den Ausdruck der Betafunktion durch drei Gammafunktionen, für welchen Jacobi (Crelle Bd. II. S. 307.), Dirichlet und Poisson andere Herleitungen gegeben haben.

Was jedoch die in dem Werke befolgten Methoden anbetrifft, so kann Referent sich nicht enthalten, auf einzelne Darstellungen aufmerksam zu machen, die nach seiner Ansicht einer strengeren Begründung bedürfen.

Die Herleitung des Summenausdrucks für ein bestimmtes Integral giebt manchen Zweifeln Raum. Es kommt (S. 192) darauf an, zu zeigen, dass die Grössen  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$  beliebig klein gemacht werden, indem man weiss, dass  $\varrho_1$  mit  $\delta_1$  unendlich klein wird,  $\varrho_2$  mit  $\delta_2$ , während  $\delta_1$  constant bleibt,  $\varrho_3$  mit  $\delta_3$ , während  $\delta_1$  und  $\delta_2$  constant bleiben u. s. w. Könnte man über alle  $\delta$  willkürlich verfügen, so wäre die Sache klar. Nun muss aber die Summe aller  $\delta$  stets  $= b - a$  sein, also kann man nur über  $n - 1$  der Grössen  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  willkürlich verfügen, und es folgt nun nicht, dass man jede der  $n$  Grössen  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$  beliebig klein machen kann. An Moigno's Beweis ist eben dasselbe auszusetzen. Es ist merkwürdig, dass die meisten der uns bekannten

Schriftsteller über höhere Analysis nicht einmal für einen so einfachen Satz einen richtigen Beweis gegeben haben. Seite 203 ist ein kleiner Irrthum. Bei der Integration der Gleichung

$$\frac{f(x, r + \Delta r) - f(x, r)}{\Delta r} = \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} + \varepsilon$$

ist  $\varepsilon$  als Constante behandelt, während es in der Regel eine Funktion von  $x$  ist; statt  $\varepsilon \int \partial x$  muss also  $\int \varepsilon \partial x$  gesetzt und gezeigt werden, dass  $\int \varepsilon \partial x$  mit  $\varepsilon$  unendlich klein wird, wenn die Integrationsgrenzen endlich sind. Dieser Nachweis erfordert einen Satz von den bestimmten Integralen, und erst in dieser, im Buche später vorkommenden Theorie kann der Satz über das Differenziren unter dem Integralzeichen vorkommen.

Die Darstellung der Zerlegung der gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche hat uns wenig zugesagt. Es ist nämlich nirgends die Möglichkeit der angenommenen Formen für die Zerlegung nachgewiesen, denn daraus, dass man nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten immer ebenso viele Gleichungen erhält, als Coëfficienten vorhanden sind, folgt doch nicht, dass sich aus diesen Gleichungen (wenn auch lineär) immer bestimmte und endliche Werthe ergeben. Uebrigens giebt es in dem Falle, wo der Nenner imaginäre Factoren hat, eine viel einfachere Zerlegungsart, als die allgemeine.

Seite 239 vermissen wir einen wichtigen Beweis. Auch konnte der Satz sogleich verallgemeinert werden, nämlich, wenn  $u_1, u_2, u_3, \dots$  eine Reihe von Grössen, deren Glieder stetige Funktionen von  $x$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  sind, und wenn die Reihe für alle  $x$  zwischen  $a$  und  $b$  convergent ist, also eine Summe  $f(x)$  hat, so ist

$$\int_a^b u_1 \partial x + \int_a^b u_2 \partial x + \text{etc.}$$

ebenfalls eine convergente Reihe, deren Summe  $= \int_a^b f(x) \partial x$  ist.

Setzt man  $u_1 + u_2 + \dots + u_n = s_n$ ,  $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  in inf.  $= R_n$ , so ist

$$\int_a^b f(x) \partial x = \int_a^b s_n \partial x + \int_a^b R_n \partial x;$$

daraus nun, dass  $R_n$  mit  $n = \infty$  verschwindet, muss bewiesen werden, dass  $\int_a^b R_n \partial x$  ebenfalls unendlich klein wird. Dieser Nach-

weis ist wiederum mit Hülfe eines bekannten Satzes über bestimmte Integrale zu geben. Uebrigens dürfen  $a$  und  $b$  nicht unendlich gross sein.

Zur approximativen Quadratur entwickelt der Verfasser die Simpson'sche Regel; dieselbe ist zwar praktisch sehr bequem, doch fehlt es an der Bestimmung der Fehlergrenze. Referent bedient sich gewöhnlich der schönen Methode von Newton, welche

vortrefflich in Minding's „Integralrechnung“ auseinandergesetzt ist und nach der Verbesserung von Gauss sehr grosse Genauigkeit giebt. (Jacobi in Crelle's Journal Bd. I. p. 301 ff.)

Seite 306 ff. wird mit Recht darauf aufmerksam gemacht, dass das Differenziren unter dem Integralzeichen nicht erlaubt sei, wenn eine der Integrationsgrenzen unendlich ist. Der Verfasser will nun  $\frac{\partial u}{\partial r}$  ermitteln aus

$$u = \int_0^{\infty} e^{-kx} \sin rx \frac{\partial x}{x}.$$

Er findet

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_0^{\infty} e^{-kx} \cos rx \partial x + \int_0^{\infty} \varrho e^{-kx} \partial x,$$

indem er

$$\frac{\Delta \sin xr}{\Delta r} = x (\cos xr + \varrho)$$

setzt. Er betrachtet nun aber wieder  $\varrho$  als Constante, indem er

$$\int_0^{\infty} \varrho e^{-kx} \partial x = \varrho \int_0^{\infty} e^{-kx} \partial x$$

nimmt, was offenbar falsch ist, da  $\varrho$  der obigen Gleichung zufolge eine Funktion von  $x$  ist.

S. 316 ist Missbrauch getrieben mit dem Differenziren einer unendlichen Reihe, worauf wir schon öfter aufmerksam gemacht haben. S. 317 ist eine einfache Reihe ohne Weiteres in eine Doppelreihe umgestaltet, welche Methode häufig fehlerhafte Resultate giebt.

Die Herleitung der periodischen Reihen von Fourier gehört im Wesentlichen Dirichlet (Crelle's Journal Bd. 4.); der Verfasser hat es indessen auf Vereinfachung dieser so schönen und strengen Methode abgesehen. Herrn Schlömilch's Beweis würde sich in der That durch seine Einfachheit sehr empfehlen, wenn er nicht erheblichen Zweifeln ausgesetzt wäre. Diese Zweifel bestehen in folgenden Punkten: 1) Indem gezeigt wurde, dass  $\int_a^b f(t) \cos kt \partial t$  einen endlichen Werth behält,

wenn  $k$  unendlich gross wird, musste auf die Fälle Bezug genommen werden, wo  $f'(t)$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  unendlich, unbestimmt oder unstetig wird. 2) Nachdem bewiesen worden, dass  $\int_a^b f(t) \sin kt \partial t$  mit  $k = \infty$  verschwindet, falls  $f(t)$  von

$a$  bis  $b$  endlich bleibt, setzt Schlömilch

$$f(t) = \frac{F(x+t) - F(x)}{\sin t};$$



auf diesen Fall kann aber das vorhergehende Theorem nicht angewandt werden, da  $f(t)$  für  $t=0$  unendlich werden kann, dann nämlich, wenn  $F(x)$  unendlich gross ist. — Uebrigens gilt die Formel (5) p. 332 der gegebenen Herleitung gemäss nur für ein ganzes ungerades  $k$ , mithin ist der Dirichlet'sche Satz weit allgemeiner.

Bei Abhandlung der Euler'schen Integrale hätte wohl der Legendre'sche Satz, von dem Dirichlet einen so meisterhaften und einfachen Beweis gegeben, nicht fehlen dürfen.

Von Seite 365—95 werden die einfachsten Eigenschaften der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung entwickelt. Referent vermisst die elliptischen Funktionen der dritten Art, sowie die elliptischen Funktionen mit imaginärem Argument; auch dürften wohl Anwendungen auf die Lemniscaten am Orte gewesen sein.

Die Herleitung der Additionsformeln hätte manche weitläufige Transformationen überflüssig gemacht, wenn der Herr Verfasser die Formel (15) p. 368 zum Ausgangspunkt gewählt hätte. Uebrigens hat er nicht nachgewiesen, dass diese Formel immer reelle Werthe von  $\omega$  liefert. Die Division der elliptischen Funktionen betreffend, hat sich ein Irrthum eingeschlichen, indem es Seite 372 heisst, dass zur Bestimmung der Amplitude  $\varphi_{\frac{1}{m}}$  immer die Auflö-

sung einer algebraischen Gleichung vom Grade  $m^2$  nöthig sei. Ist nämlich  $m$  eine gerade Zahl  $= 2n$ , so hat man bekanntlich  $\sin am 2n\beta = \frac{P_{2n}}{S_{2n}} xyz$ , wo  $x = \sin am \beta$ ,  $y = \cos am \beta$ ,  $z = \Delta am \beta$ ,  $P_{2n}$ ,  $S_{2n}$  ganze algebraische Funktionen von  $x^2$ , die erste vom Grade  $(2n)^2 - 4$ , die andere vom Grade  $(2n)^2$ ; macht man nun die Gleichung

$$\sin am 2n\beta = \frac{P_{2n}}{S_{2n}} x \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}$$

( $k$  der Modulus) rational, so kommt  $\sin^2 am 2n\beta = \Theta(x^2)$ , wo die Funktion  $\Theta$  vom Grade  $8n^2$  ist. Um also  $\sin am \frac{\beta}{2n}$  zu bestimmen, ist die Auflösung einer Gleichung vom Grade  $2(2n)^2$  erforderlich. Wollte Herr Schlömilch auf diesen Gegenstand nicht ausführlicher eingehen, so musste die Bemerkung über den Grad der aufzulösenden Gleichung wohl überhaupt wegfallen. Damit nämlich dieser Grad der kleinstmögliche werde, darf die Bestimmung von  $\sin am m\beta$ ,  $\cos am m\beta$ ,  $\Delta am m\beta$  mit Hülfe des Additionstheorems nicht durch willkürliche Zerfällung des Arguments  $m\beta$  vorgenommen werden. Setzt man z. B.  $6\beta$  zusammen aus  $2\beta$  und  $4\beta$ , so steigt der Nenner  $S$  in  $\sin am 6\beta = \frac{P}{S} x \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-k^2 x^2}$  auf den 40sten Grad, dagegen nur auf den 36sten Grad, wenn  $6\beta$  aus  $3\beta + 3\beta$  zusammengesetzt wird. Nur unter der besonderen Voraussetzung, dass  $2n\beta$  immer aus  $n\beta + n\beta$ ,  $(2n+1)\beta$  aus  $n\beta + (n+1)\beta$  zusammengesetzt wird, führt die Bestimmung von  $\sin am \frac{1}{m}\beta$ ,

$\cos \operatorname{am} \frac{1}{m} \beta$ ,  $\Delta \operatorname{am} \frac{1}{m} \beta$  auf eine Gleichung vom Grade  $m^2$  (oder  $2m^2$ , wenn es sich um  $\sin \operatorname{am}$  handelt und  $m$  gerade ist). Der Beweis dieses Theorems erfordert jedoch ein näheres Eingehen auf den Gegenstand.

Bei der Landen'schen Substitution haben wir ebenfalls einige Bemerkungen zu machen. Es ist

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} F(k_n, \varphi_n),$$

wo

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}, \text{ etc.}$$

$$\sin(2\varphi_1 - \varphi) = k \sin \varphi, \quad \sin(2\varphi_2 - \varphi_1) = k_1 \sin \varphi_1 \text{ etc.}$$

Dass nun  $k_n$  gegen die Einheit convergirt, wenn  $n$  unendlich wird, hat der Verfasser nicht erwiesen. Auch fehlt die Bestimmung der Fehlergrenze bei Anwendung dieser Formeln. Setzt man nämlich

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} \left| \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \varphi_n \right) \right|,$$

so ist leicht zu erweisen, dass der begangene Fehler kleiner als  $\frac{2}{1+k} \cdot \frac{2}{1+k_1} \cdots \frac{2}{1+k_{n-1}} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} (\varphi_{n-1} - \varphi_n)}{\cos \varphi_n} \varphi_n$ , welche Grösse beliebig klein gemacht werden kann. Ebenso ist im Fall der Verkleinerung des Modulus nicht gezeigt, dass der letztere sich der Null nähert. Macht man hier

$$k_{-1} = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}}, \quad k_{-2} = \frac{1 - \sqrt{1-k_{-1}^2}}{1 + \sqrt{1-k_{-1}^2}} \text{ etc.,}$$

$$\tan \varphi_{-1} = \frac{\sin 2\varphi}{k_{-1} + \cos 2\varphi}, \text{ etc.}$$

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_{-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{-2}}{2} \cdots \frac{1+k_{-n}}{2} \varphi_{-n} + \Gamma;$$

so findet sich der Fehler

$$\Gamma < (1+k_{-1})(1+k_{-2}) \cdots (1+k_{-n}) \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1-k_{-n}^2}} - 1 \right),$$

convergirt also gegen Null.

Die Werthbestimmung der Fourier'schen Doppelintegrale (S. 409) beruht auf der Umkehrung der Integration; mir scheint aber eine solche Umkehrung nicht immer zulässig, wenn die Grenzen der Integration unendlich sind. Die Formel

$$\frac{\pi}{2} f(s) = \int_0^\infty \cos s\omega d\omega \int_0^\infty f(\vartheta) \cos \omega \vartheta d\vartheta$$

scheint einer genauen und gründlichen Untersuchung zu bedürfen. Ist z. B.  $f(\vartheta) = 1$ , so hat sie wohl keinen rechten Sinn, da in diesem Falle  $\int_0^x \cos \omega \vartheta d\vartheta$  unbestimmt ist.

Die Existenz des Integrals einer Differentialgleichung von der Form  $\frac{\partial y}{\partial x} = \chi(x, y)$  wird zuerst durch geometrische Betrachtungen dargethan. Diese Ansicht der Sache (p. 437) ist jedenfalls wohl nicht die rechte. Die Differentialgleichung sei nämlich

$$y^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + y^2 = r^2.$$

Geht man von den Anfangswerthen  $x=0$ ,  $y=r$  aus, so ergibt sich durch Wiederholung der Tangentenconstruction die Gerade  $y=r$ , welche bekanntlich das singuläre Integral der Gleichung darstellt. Der Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  geht ebenfalls durch den Punkt  $x=0$ ,  $y=r$ , er genügt auch der Differentialgleichung und repräsentirt ein particuläres Integral. Wäre nun die geometrische Ansicht der Sache die angemessene, so müssten sich doch, wenn man die Construction von einem bestimmten Punkte an beginnt, gleichzeitig das singuläre und particuläre Integral ergeben, wenn beide vorhanden sind. Ebenso gehen durch den Punkt  $x=0$ ,  $y=\frac{1}{2}a$  der Kreis  $y = \sqrt{ax - x^2 + \frac{1}{4}a^2}$ , und die Parabel  $y = \sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}$ , deren Gleichungen resp. das particuläre und das singuläre Integral der Gleichung  $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{2y} - \frac{1}{y} \sqrt{ax - y^2 + \frac{1}{4}a^2}$  darstellen, während die Tangentenconstruction wiederum nur das singuläre Integral liefert. Uebrigens konnte der Herr Verfasser analytisch sehr leicht nachweisen, dass der Differentialgleichung  $\frac{\partial y}{\partial x} = \chi(x, y)$  nicht mehr als zwei Integrale genügen, deren eines das allgemeine, das andere das singuläre ist.

Seite 447 vermissen wir den Beweis dafür, dass ein integrierender Factor immer existirt, wenn  $\phi dx + \psi dy$  kein vollständiges Differential ist.

Die Integration der lineären Differentialgleichungen wird zuerst an dem Falle durchgeführt, wo die Gleichung von der zweiten Ordnung ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, hätte der Verfasser das Problem von Anfang an allgemein behandeln können. Sehr sonderbar ist die Herleitung des Integrals der Gleichung  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a \frac{\partial y}{\partial x} + by = 0$  für den Fall, dass die Wurzeln der Gleichung  $z^2 + az + b = 0$  einander gleich sind. Sind die Wurzeln zuerst verschieden ( $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ), so setzt Schlömilch  $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta$  und hat  $y = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 e^{\delta x})$ . Macht man  $\delta = 0$ , so kann immer nur herauskommen  $y = \text{Const. } e^{\lambda_1 x}$ ; der Verfasser verwandelt aber  $e^{\delta x}$  nach der Exponentialreihe, findet  $y = e^{\lambda_1 x} (C + C'x + \frac{1}{2}C'\delta x^2 + \dots)$  und gelangt nun zu der Form  $y = (C + C'x)e^{\lambda_1 x}$ . Da er aber  $C' = C_2 \delta$  gesetzt hat, so ist  $C' = 0$  mit  $\delta = 0$ , und somit kann keine neue Form herauskommen.

Uebrigens hat Referent bei der Integration der lineären Differentialgleichungen in den ihm bekannten Werken überall den Beweis dafür vermisst, dass das Integral immer auf die bekannte angenommene Form gebracht werden kann, was doch sehr wesentlich ist.

Die Integration der totalen Differentialgleichungen mit mehreren Variabeln ist sehr kurz behandelt. Referent ist der Meinung, dass dieser Gegenstand ganz wegbleiben konnte, denn mit Halbheiten ist doch nichts anzufangen.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen, welche den Schluss des Buches bildet, wird auf die Integration von simultanen Gleichungen zurückgeführt. Die ganze Herleitung (p. 528 ff.) ist aber dem Referenten ganz unverständlich geblieben (namentlich p. 529) und muss auf ganz andere Weise gegeben werden.

Stralsund, den 17. April 1853.

Dr. Arndt.

## Ueber eine Sammlung von bestimmten Integralen.

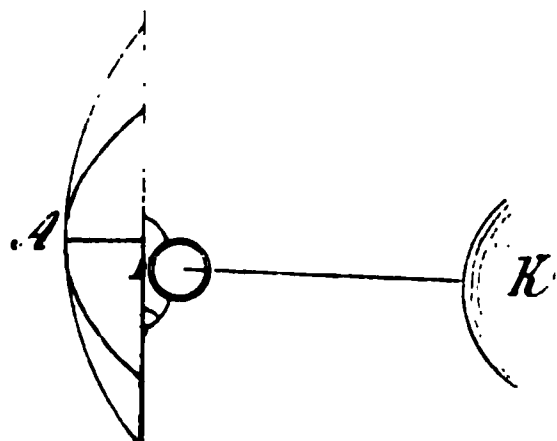
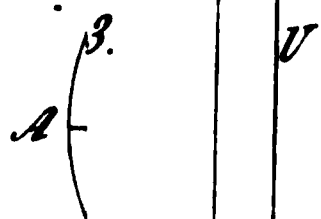
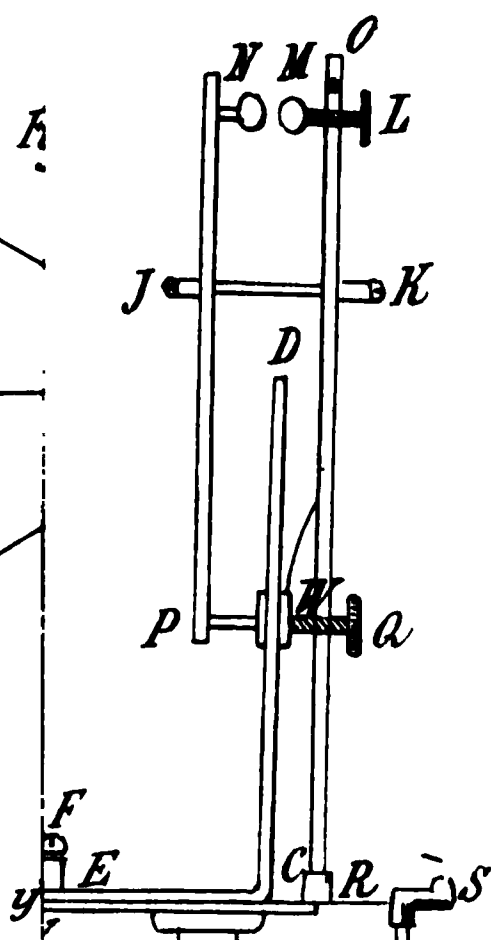
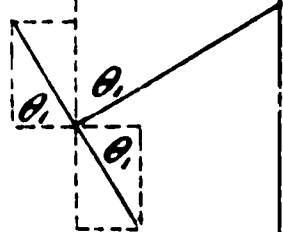
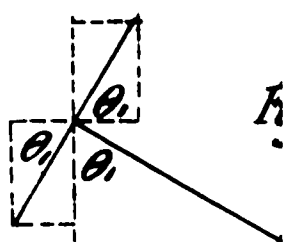
Dass dem Mathematiker Tafeln nöthig sind, bedarf wohl nicht eines Beweises; insbesondere braucht er solche, die ihm die Resultate verschiedener, oft mühseliger Forschungen in der Ordnung vor die Augen bringen sollen, wie er sie zu benutzen Anleitung findet. Wer ist nicht froh, dass Andere vor ihm die Logarithmen berechnet haben; sonst würde ihr Gebrauch ihm wohl versagt sein, und doch könnte er sie selbst berechnen nach festgesetzter, gleichförmiger Behandlungsweise. Diese aber fehlt gänzlich bei einer anderen Art von Ausdrücken, den bestimmten Integralen, und deshalb dürfte bei deren häufigem Gebrauche eine Tafel wohl nicht fehlen unter den mathematischen Hilfsmitteln. Es ist aber dem nicht so: obschon bei anderen Sammlungen auch wohl Tafeln mit einigen bestimmten Integralen mit aufgenommen sind, so ist doch, meines Wissens, nicht da, was man einigermaßen vollständig nennen könnte. Woran aber kann dies wohl liegen?

Erstens: Ist die Methode der ganzen Integralrechnung gewissermaßen eine indirecte, so gilt diess namentlich von der Lehre von den bestimmten Integralen. Es ist nur durch eine grosse Anzahl ganz verschiedener Methoden gelungen, die Formeln zu sammeln, die uns jetzt zu Gebote stehen. Nachdem für diese von Euler, Cauchy, Legendre, Poisson, Laplace der Grund gelegt wurde, sind seitdem die Methoden vermehrt und durch eine Menge Mathematiker zur Ermittlung neuer Formeln angewandt worden. Diese Arbeiten sind überall in Journalen und in den Abhandlungen der verschiedenen Academies zerstreut. Daher ist wohl nicht ein Jeder in der Lage, diese verschiedenen Resultate zu benutzen, weit weniger sie alle bei einander zu haben.

Noch führt dasselbe Indirecte in der Methode zu einem anderen nothwendigen Uebel, welches, wie in der Integralrechnung überhaupt, weit stärker in diesem Theile hervorragt: dass es in dem Bekannten zuweilen kleinere, öfter auch grössere Lücken giebt, dass Ausdrücke, oft nur um ein Weniges verschieden, doch mittelst anderer Methoden und bisweilen gar nicht zu ermitteln sind; ja, man könnte hier fast sagen, dass es noch gar kein Ganzes gebe und lauter einzelne Bruchstücke da stehen, welche zu einem Ganzen zusammenzubringen noch nicht gelungen ist. Diess hat seinen Grund, wie gesagt, in der ganzen indirecten Behandlungsweise und auch wohl in deren Verschiedenheit.

Einen eigenthümlichen Vortheil gewährt zu haben kann aber der Ungleichartigkeit der Methoden nicht abgesprochen werden; oft ist man auf







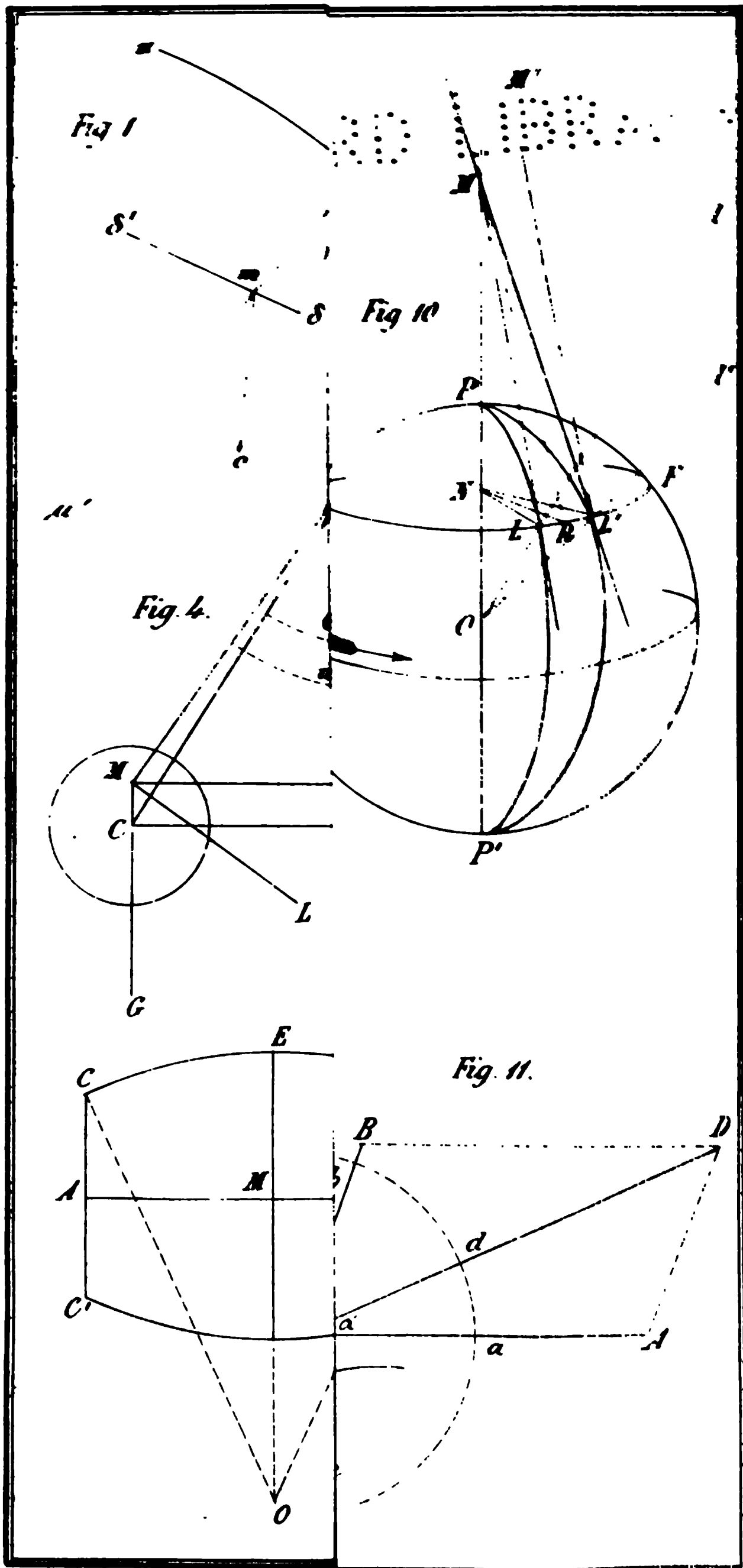






Fig. 6.

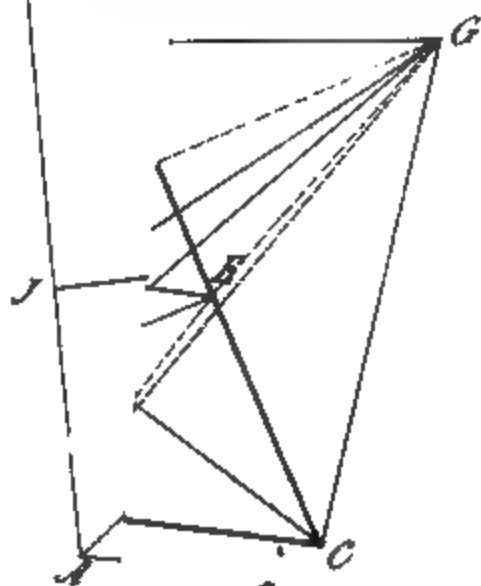
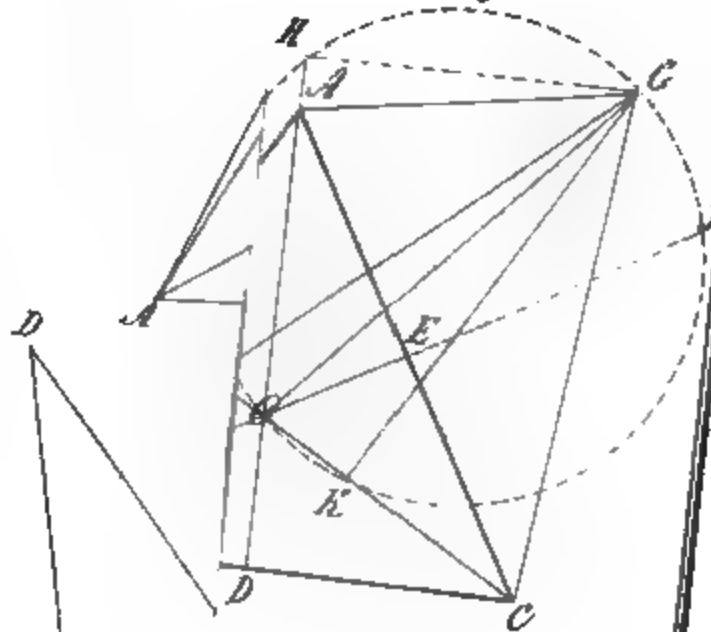
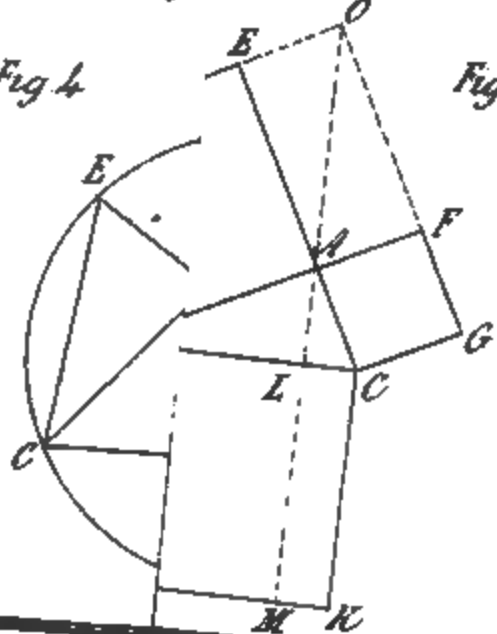


Fig. 4

*Fig. 9.*



*Grunert Arch*





To avoid fine, this book should be returned on  
or before the date last stamped below

--	--	--

510.5.  
A673  
V.20

**STORAGE ARI**





